



Tiago Miguel Lopes Pratas

Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

Optimização topológica multimaterial de estruturas reticuladas com constrangimentos de tensão

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientador: Doutor Pedro Samuel Gonçalves Coelho
Professor Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia
da Universidade NOVA de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutor João Mário Burguete Botelho Cardoso
Arguente: Prof. Doutor José Arnaldo Pereira Leite Miranda Guedes
Vogal: Prof. Doutor Pedro Samuel Gonçalves Coelho



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro, 2019

Tiago Miguel Lopes Pratas

Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

**Optimização topológica multimaterial
de estruturas reticuladas com
constrangimentos de tensão**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientador: Doutor Pedro Samuel Gonçalves Coelho
Professor Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia
da Universidade NOVA de Lisboa

Setembro, 2019

Optimização topológica multimaterial de estruturas reticuladas com constrangimentos de tensão

Copyright © Tiago Miguel Lopes Pratas, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

NOTA: Esta dissertação não foi escrita em conformidade com o Segundo Protocolo Modificativo do Acordo Ortográfico de 1990.

*À minha mãe,
Odília Lopes.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostava de agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Pedro Coelho, pelo voto de confiança que me deu ao aceitar-me no desenvolvimento deste tema de investigação. No decorrer desta dissertação, mostrou-se sempre disponível e dedicado no esclarecimento de dúvidas que iam surgindo. Agradeço-lhe todo o apoio e motivação que me deu ao longo desta caminhada. Quero também prestar um agradecimento por todos os conhecimentos que me transmitiu, não só no âmbito desta dissertação, mas também ao longo da minha formação.

Ao Prof. Dr. João Cardoso, agradeço o seu interesse e disponibilidade em esclarecer dúvidas pontuais relacionadas com esta dissertação. Estou-lhe também grato por todos os conhecimentos transmitidos em diversas unidades curriculares ao longo da minha formação académica.

Ao Prof. Dr. Erik Lund da Universidade de Aalborg, Dinamarca, agradeço os esclarecimentos prestados em leis de interpolação de material e estratégias de optimização, que se revelaram muito úteis no estabelecimento de uma metodologia que permitisse alcançar os objectivos desta dissertação.

Agradeço ao Prof. Dr. Krister Svanberg do KTH Royal Institute of Technology de Estocolmo, Suécia, pela disponibilização do código MATLAB do algoritmo MMA utilizado na obtenção dos resultados desta dissertação.

A todos os meus colegas do NME quero agradecer a entreajuda e o excelente ambiente proporcionado no Laboratório de Mecânica Estrutural ao longo destes meses. Em particular, agradeço ao meu colega Bruno Barroca todas as discussões e trocas de ideias proveitosas.

Aos grandes amigos que a FCT me deu, Carlos Catarino, Francisco Henriques, Luís Marques e Manuel Madeira, agradeço a amizade e companheirismo demonstrados ao longo destes anos em todos os dias e noites de estudo e camaradagem.

Por último, agradeço aos meus familiares e amigos de sempre, por todo o apoio que me prestaram nos bons e maus momentos ao longo da minha vida e por terem contribuído para a pessoa que sou hoje.

Resumo

Esta dissertação tem como principal objectivo a apresentação de uma metodologia de optimização topológica baseada na variável de densidade capaz de resolver problemas de minimização da massa de estruturas reticuladas com constrangimentos de tensão, considerando múltiplas fases de material.

Estuda-se o tema da optimização topológica baseada na variável densidade, com ênfase na imposição de constrangimentos de tensão e nas dificuldades inerentes. São também explorados diversos modelos de interpolação de material definidos por funções contínuas e diferenciáveis que possibilitem, em cada elemento, uma fase de material seleccionada a partir de um conjunto de materiais previamente definido.

Nesta dissertação, foram consideradas três classes de problemas, classificadas em função do tipo de fases de material presentes em cada uma delas: SMTO (vazio + 1 material sólido), MMT02 (vazio + 2 materiais sólidos) e MMT03 (vazio + 3 materiais sólidos). Na formulação dos problemas de optimização consideraram-se três leis de interpolação de material baseadas no modelo DMO 1 para interpolar o valor de três propriedades no domínio de cada elemento: massa, módulo de Young e tensão admissível. Uma utilização adequada desta lei pressupõe que o domínio de soluções admissíveis é restringido apenas aos pontos onde as propriedades dos materiais disponíveis não são extrapoladas, o que requer a imposição de um constrangimento adicional por elemento finito. Considerou-se ainda um constrangimento adicional que envia o valor das variáveis de projecto para os seus valores limite, o que garante a obtenção de soluções de distribuição de material discretas.

O cálculo de sensibilidades é feito recorrendo a métodos analíticos e as optimizações decorrem controladas por um algoritmo de optimização, MMA, e tendo por detrás um conjunto de programas desenvolvidos em linguagem MATLAB.

Os resultados obtidos permitiram comprovar a viabilidade desta metodologia na obtenção de estruturas reticuladas leves, nas quais os valores limite da tensão são respeitados.

Palavras-chave: Optimização topológica, multimaterial, tensão, estrutura reticulada, densidade, análise de sensibilidade

Abstract

The main goal of this dissertation is the development of a procedure, which should be able to solve stress constrained multimaterial topology optimization problems, where mass minimization of truss structures is sought for.

Density-based topology optimization is studied, with emphasis on the imposition of stress constraints and inherent difficulties. This work also requires a literature review in several material interpolation schemes defined by continuous and differentiable functions, which allow the selection of a material phase for a pre-defined set of candidate materials on each element.

In this dissertation, three classes of problems were considered, depending on the nature of the material phases in each one of them: SMTO (void + 1 solid material), MMT02 (void + 2 solid materials) e MMT03 (void + 3 solid materials). Three interpolation laws based on the DMO 1 scheme were used to obtain the mass density, Young's modulus and allowable stress on each finite element. Proper use of this law assumes that the feasible domain is restricted only to the points where the properties of available materials are not extrapolated, which requires the imposition of an additional constraint per finite element. To push the design variables to the limit values, an additional constraint was considered, resulting in structures composed exactly by materials from the pre-defined set.

Sensitivity analysis is carried out using analytic methods. Optimization problems are solved using the MMA algorithm, implemented within a set of programs developed in MATLAB.

The results obtained confirmed the viability of this methodology in the design of lightweight truss structures, in which the stress limit values are respected.

Keywords: Topology optimization, multimaterial, stress, truss structure, density, sensitivity analysis

Simbologia e Notações

Latim

\mathbf{a}	Cromossoma do algoritmo genético
A_e	Área do elemento e
A_E	Coeficiente de escala do <i>Ordered SIMP interpolation</i>
B_E	Coeficiente de translação do <i>Ordered SIMP interpolation</i>
B_e	Valor da entrada azul da cor RGB normalizada do elemento e
C	<i>Compliance</i>
c_{MMA}	Parâmetro da violação de constrangimentos do MMA
\mathbf{d}^k	Direcção de procura na iteração k
E	Módulo de Young
E_e	Módulo de Young do elemento e
$E^{(m)}$	Módulo de Young da fase de material m
\mathbf{E}, E_{ijkl}	Tensor de rigidez
\mathbf{E}_e	Tensor de rigidez do elemento e
$\mathbf{E}^{(m)}, E_{ijkl}^{(m)}$	Tensor de rigidez da fase de material m
\mathbf{f}	Vector de carregamentos
f, f_0	Função objectivo
f^*	Valor óptimo da função objectivo
f_i	Constrangimento de desigualdade i
G	Módulo de distorção
G_e	Valor da entrada verde da cor RGB normalizada do elemento e
g	Constrangimento de desigualdade
g_e^{mat}	Constrangimento que exclui soluções com extrapolação de propriedades de material no elemento e
$g_{e,l}^\sigma$	Constrangimento de tensão no elemento e para o caso de carga l
g^V	Constrangimento de volume ou área
g^M	Constrangimento de massa
g^ϵ	Constrangimento que coloca as variáveis de projecto nos seus valores limite
h	Constrangimento de igualdade
\mathbf{K}	Matriz de rigidez global
L_e	Comprimento do elemento e

L	Função Lagrangeana
\bar{M}	Massa imposta
n^c	Número total de constrangimentos
n^{crit}	Número de constrangimentos críticos
n^e	Número de elementos finitos
n^f	Número de fases de material
n^{GDL}	Número de graus de liberdade
n^{iter}	Número de iterações
n^k	Número de genes
n^{LC}	Número de casos de carga
n^{LSF}	Número de <i>level-set functions</i>
n^m	Número de fases de material sólido
n^s	Número de segmentos
P	Carga pontual aplicada
\mathbf{P}	Matriz com as propriedades das fases de material
p	Expoente de penalização do modelo SIMP
q	Parâmetro de penalização do modelo RAMP, expoente do <i>qp-approach</i>
R_e	Valor da entrada vermelho da cor RGB normalizada do elemento e
\mathbf{s}	Pontos do domínio Ω
s_j	Variável artificial na função Lagrangeana associada ao constrangimento de desigualdade j
\mathbf{u}	Vector de deslocamentos
V^*, \bar{V}	Volume ou área impostos
w	Função de peso
w_e	Função de peso para a selecção de material no elemento e
$w_{e,m}$	Função de peso para a selecção do material m no elemento e
w_l	Função de peso do caso de carga l
\mathbf{x}	Vector das variáveis de projecto
\mathbf{x}'	Valor inicial das variáveis
$\hat{\mathbf{x}}$	Vector das variáveis de projecto discretas
$\mathbf{x}^{(k)}$	Valor das variáveis de projecto na iteração k
$\Delta \mathbf{x}$	Perturbação no valor das variáveis de projecto
x_e	Variável de densidade artificial associada ao elemento e
$x_{e,m}$	Variável de densidade artificial associada à selecção da fase de material m no elemento e

$\hat{x}_{e,m}$	Variável discreta associada à selecção da fase de material m no elemento e
\bar{x}	Limite superior das variáveis de projecto
\underline{x}	Limite inferior das variáveis de projecto
\mathbf{y}	Vector das variáveis artificiais do subproblema do MMA
\mathbf{z}	Vector de carga adjunta, <i>dummy load vector</i>
z	Variável artificial do subproblema do MMA

Grego

α	Constante de penalização, ângulo de transformação de coordenadas
α_k	Passo óptimo na iteração k
β_e	Propriedade de material arbitrária no elemento e
Γ	Fronteira delimitadora do domínio de projecto
Γ^j	Interface da <i>level-set function</i> j
$\Delta_{\%}$	Variação percentual, erro relativo
ε	Parâmetro do ε -relaxation, parâmetro do constrangimento g^ε
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{kl}$	Tensor das extensões
$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_e \rangle$	Vector de extensão macroscópica
ζ	Parâmetro do constrangimento g^ζ
λ	Vector adjunto
λ_g	Multiplicador de Lagrange do constrangimento de desigualdade
λ_h	Multiplicador de Lagrange do constrangimento de igualdade
ρ_e	Massa volúmica do elemento e
$\rho^{(m)}$	Massa volúmica da fase de material m
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	Tensor das tensões
σ_e	Tensão axial lida no elemento e
$\sigma_{e,l}$	Tensão axial lida no elemento e para o caso de carga l
$\bar{\sigma}_e$	Tensão admissível no elemento e
$\boldsymbol{\sigma}_e$	Tensão microscópica no elemento e
$\langle \boldsymbol{\sigma}_e \rangle$	Tensão macroscópica no elemento e
$\bar{\sigma}^{(m)}$	Tensão admissível da fase de material m
σ^{VM}	Tensão de von-Mises
φ	Função degrau
ϕ_j	<i>Level-set function</i> j
Ψ	Função arbitrária

ψ	Somatório dos termos quadráticos do constrangimento g^e
Ω	Domínio de projecto
Ω^{mat}	Subdomínio ocupado por material
Ω^{vaz}	Subdomínio ocupado por vazio
$ \Omega^{mat} $	Volume ou área do subdomínio ocupado por material
$ \Omega _e$	Volume ou área do elemento e

Abreviaturas

AG	Algoritmo Genético
AR	<i>Alkali resistant</i>
CAD	<i>Computer-Aided Design</i>
DMO	<i>Discrete Material Optimization</i>
FRC	<i>Fiber Reinforced Concrete</i>
FSD	<i>Fully Stress Design</i>
KKT	<i>Karoush-Kuhn Tucker</i>
LSF	<i>Level-Set Function</i>
LSM	<i>Level-Set Method</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
MMA	<i>Method of Moving Asymptotes</i>
MMMJTO	<i>Multi Material Multi Joint Topology Optimization</i>
MMS	<i>Multi Material Selection</i>
MMTO	<i>Multi Material Topology Optimization</i>
MPVC	<i>Mathematical Programs with Vanishing Constraints</i>
PFM	<i>Phase-Field Method</i>
QP	<i>Quadratic Programming</i>
RAMP	<i>Rational Approximation of Material Properties</i>
RMMI	<i>Recursive Multiphase Materials Interpolation</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
SMTTO	<i>Single Material Topology Optimization</i>
SQP	<i>Sequential Quadratic Programming</i>
UMMI	<i>Uniform Multiphase Materials Interpolation</i>
X-FEM	<i>eXtented Finite Element Method</i>
XWB	<i>eXtra Wide Body</i>

Índice Geral

Agradecimentos	IX
Resumo	XI
Abstract	XIII
Simbologia e Notações	XV
Índice Geral	XIX
Índice de Figuras	XXI
Índice de Tabelas	XXIII

Capítulo 1 – Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objectivos	2
1.3 Estrutura da dissertação	2

Capítulo 2 – Estado da Arte	5
2.1 Apontamento histórico sobre Optimização Estrutural	5
2.2 Optimização Estrutural no projecto moderno	9
2.3 Optimização topológica	12
2.3.1 Formulação do problema discreto	13
2.3.2 Métodos baseados na variável densidade	15
2.3.2.1 <i>Solid Isotropic Material with Penalization</i> (SIMP)	16
2.3.2.2 <i>Rational Approximation of Material Properties</i> (RAMP)	17
2.3.2.3 Formulação do problema relaxado	19
2.3.2.4 Penalização explícita de densidades intermédias	20
2.3.3 Constrangimentos de tensão	21
2.3.3.1 ε -relaxation	24
2.3.3.2 <i>qp-approach</i>	26
2.3.3.3 Exemplo de aplicação	28
2.3.4 Consideração de múltiplas fases de material	34
2.3.4.1 Extensões do modelo SIMP clássico	36
2.3.4.2 <i>Discrete Material Optimization</i> (DMO)	41
2.3.4.3 <i>Ordered SIMP interpolation</i>	50
2.3.4.4 Outros	51

Capítulo 3 – Fundamentos de optimização	55
3.1 Formulação standard	55
3.2 Algoritmos de optimização	56
3.2.1 Programação Quadrática Sequencial (SQP)	57
3.2.2 Método das Assíptotas Móveis (MMA)	58
3.2.3 Algoritmo Genético (AG)	60
3.3 Cálculo de sensibilidades	60
3.3.1 Método das diferenças finitas	60

3.3.2 Métodos analíticos	61
3.3.2.1 Método da diferenciação directa.....	62
3.3.2.2 Método adjunto.....	63
3.3.2.3 Comparação	63
Capítulo 4 – Formulação dos problemas de optimização.....	65
4.1 Introdução.....	65
4.2 Classes de problemas	66
4.3 Formulação dos problemas discretos	66
4.4 Formulação dos problemas relaxados	74
4.4.1 Formulação dos problemas originais.....	74
4.4.2 Eliminação de densidades intermédias	76
4.4.3 Estratégia de penalização	78
Capítulo 5 – Cálculo de sensibilidades	83
5.1 Introdução.....	83
5.2 Função objectivo	84
5.3 Constrangimentos de tensão.....	85
5.4 Constrangimentos para eliminação de materiais fictícios	91
5.5 Constrangimento g^e	91
Capítulo 6 – Resultados	93
6.1 Trelça de 3 barras	94
6.2 Trelça de 10 barras	97
6.3 Trelça de 11 barras	100
6.4 Trelça de 21 barras	102
6.5 Trelça de 26 barras	105
6.6 Trelça de 36 barras	109
6.7 Trelça de 110 barras	112
Capítulo 7 – Conclusões e trabalhos futuros.....	115
7.1 Conclusões.....	115
7.2 Trabalhos futuros.....	119
Bibliografia.....	121
Anexos	129
Anexo A – Tempos de optimização do MMA	131
Anexo B – Históricos da violação máxima dos constrangimentos	133
Anexo C – Estratégias de penalização consideradas nos problemas de optimização	137
Anexo D – Código do programa GroundStructure.m	139

Índice de Figuras

Figura 2.1: Principais categorias de otimização estrutural aplicadas numa viga em consola...	6
Figura 2.2: Exemplos de <i>Ground Structure</i> para um domínio rectangular de 15 nós. (Adaptado de [11]).....	8
Figura 2.3: Enquadramento das categorias de otimização estrutural nas diferentes fases do projecto de estruturas. (Adaptado de [22])	9
Figura 2.4: <i>Leading edge ribs</i> utilizadas no Airbus A380. (Extraído de [84]).....	10
Figura 2.5: Otimização topológica do <i>pylon</i> do Airbus A350 XWB. (Adaptado de [75] e [5])11	
Figura 2.6: Topologia ótima da estrutura interna do autocarro apresentado em [62].....	11
Figura 2.7: Comparação do efeito de diferentes expoentes de penalização p e parâmetros q equivalentes (para $x_e = 0.5$) nas leis SIMP e RAMP, respectivamente.....	18
Figura 2.8: Representação do espaço de projecto de um problema tipo de otimização topológica com constrangimentos de tensão (Adaptado de [100]).....	23
Figura 2.9: Treliza de 3 barras de Kirsch [52].....	28
Figura 2.10: Representação gráfica do problema de áreas não relaxado do ponto de vista das tensões.	31
Figura 2.11: Representação gráfica dos resultados obtidos no problema de otimização de áreas. $\varepsilon = \{0.05, 0.005\}$	31
Figura 2.12: Representação gráfica do problema de densidades não relaxado do ponto de vista das tensões.	32
Figura 2.13: Representação gráfica dos resultados obtidos no problema de otimização de densidades. $q = \{2.5, 2.95\}$	32
Figura 2.14: Representação gráfica da lei SIMP regressiva de 3 fases de material para três valores de expoente de penalização.....	37
Figura 2.15: Funções de peso da lei SIMP regressiva para 3 fases de material e considerando $p = 3$	37
Figura 2.16: Variáveis de projecto associadas a cada uma das fases de material na lei SIMP regressiva de 3 fases.	38
Figura 2.17: Representação gráfica da lei DMO 1 considerando 2 fases de material sólido e 1 de vazio, para três valores de expoente de penalização.	43
Figura 2.18: Funções de peso da lei DMO 1 para 2 fases de material sólido e 1 de vazio considerando $p = 3$	43
Figura 2.19: Representação gráfica da lei DMO 4 considerando 2 fases de material sólido e 1 de vazio, para três valores de expoente de penalização.	46
Figura 2.20: Funções de peso da lei DMO 4 para 2 fases de material sólido e 1 de vazio considerando $p = 3$	47
Figura 2.21: Representação gráfica da lei DMO 5 considerando 2 fases de material sólido, para três valores de expoente de penalização.	48
Figura 2.22: Funções de peso da lei DMO 5 para 2 fases de material sólido considerando $p = 3$	49

Figura 2.23: Representação gráfica do <i>Ordered SIMP interpolation</i> para interpolação do módulo de Young e para funções de custo ou massa.	50
Figura 2.24: Definição implícita dos diferentes subdomínios de material em função do valor das level-set functions, considerando 3 fases de material sólido e 1 de vazio. (Adaptado de [104])	52
Figura 4.1: Exemplos de cromossomas associados a distribuições de material num domínio discretizado em 4 elementos, considerando problemas SMTO, MMTO2 e MMTO3.	71
Figura 4.2: Representação gráfica da lei DMO 1 para a interpolação de uma propriedade de material arbitrária num elemento, considerando $p = 3$ e $n^m = 2$. (a) Visualização a 3D. (b) Visualização a 2D.....	75
Figura 4.3: Representação gráfica das superfícies de interpolação da massa volúmica, módulo de Young e tensão admissível num elemento, considerando $n^m = 2$ e expoentes de penalização finais.....	80
Figura 4.4: Visualização gráfica da estratégia de penalização.....	81
Figura 5.1: Elemento de barra arbitrário.	86
Figura 5.2: Exemplos de vectores de carga fictícia numa treliça de 10 barras com constrangimentos de tensão.....	87
Figura 6.1: Dados da treliça de 3 barras.....	94
Figura 6.2: Dados da treliça de 10 barras.....	97
Figura 6.3: Dados da treliça de 11 barras.....	100
Figura 6.4: Dados da treliça de 21 barras (11 barras após aplicação de condições de simetria).	102
Figura 6.5: Dados da treliça de 26 barras.....	105
Figura 6.6: Treliça de 26 barras – (a) solução do problema MMTO2 obtida pelo AG (b) solução do problema MMTO2 obtida pelo MMA.....	108
Figura 6.7: Dados da treliça de 36 barras.....	109
Figura 6.8: Dados da treliça de 110 barras (55 barras após aplicação de condições de simetria).	112
Figura D.1: Ground structure criada a partir dos nós da estrutura de 26 barras através do problema GroundStructure.m.	141
Figura D.2: Ground structure criada a partir dos nós da estrutura de 36 barras através do problema GroundStructure.m.	141

Índice de Tabelas

Tabela 2.1: Dados dos problemas resolvidos para demonstrar o fenómeno da singularidade..	29
Tabela 2.2: Resultados obtidos no problema de optimização de áreas da treliça de três barras após relaxamento dos constrangimentos de tensão.	31
Tabela 2.3: Resultados obtidos no problema de optimização de densidades da treliça de três barras após relaxamento dos constrangimentos de tensão.	33
Tabela 2.4: Classificação dos problemas de optimização topológica consoante o tipo de fases de material.	35
Tabela 3.1: Algoritmo de optimização geral aplicável a optimização constrangida e não constrangida.	56
Tabela 4.1: Classes de problemas resolvidos.	66
Tabela 4.2: Formulação dos problemas discretos SMTO e MMTO de minimização da <i>compliance</i> com constrangimento na quantidade de recursos utilizados.	68
Tabela 4.3: Formulação dos problemas discretos SMTO e MMTO de minimização da massa com constrangimentos de tensão.	69
Tabela 4.4: Número de variáveis de projecto e constrangimentos dos problemas discretos.	70
Tabela 4.5: Tabela de propriedades de material a ser lida pelo AG nos problemas SMTO.	71
Tabela 4.6: Tabela de propriedades de material a ser lida pelo AG nos problemas MMTO2.	71
Tabela 4.7: Tabela de propriedades de material a ser lida pelo AG nos problemas MMTO3.	71
Tabela 4.8: Formulação dos problemas relaxados SMTO e MMTO de minimização da massa com constrangimentos de tensão.	74
Tabela 4.9: Formulação dos problemas relaxados com penalização SMTO e MMTO de minimização da massa com constrangimentos de tensão.	77
Tabela 4.10: Número de variáveis de projecto e constrangimentos dos problemas relaxados com e sem penalização de minimização da massa com constrangimentos de tensão.	78
Tabela 4.11: Valores inicial e final dos expoentes de penalização.	79
Tabela 6.1: Propriedades das fases de material consideradas na resolução dos problemas de optimização.	93
Tabela 6.2: Treliça de 3 barras – distribuições de material, distribuições da violação das tensões admissíveis e valor das funções de peso no óptimo dos problemas resolvidos pelo MMA.	95
Tabela 6.3: Treliça de 3 barras – parâmetros da optimização.	96
Tabela 6.4: Treliça de 3 barras – convergência da função objectivo e estratégia de penalização.	96
Tabela 6.5: Treliça de 10 barras – distribuições de material, distribuições da violação das tensões admissíveis e valor das funções de peso no óptimo dos problemas resolvidos pelo MMA.	98
Tabela 6.6: Treliça de 10 barras – parâmetros da optimização.	98
Tabela 6.7: Treliça de 10 barras – convergência da função objectivo e estratégia de penalização.	99
Tabela 6.8: Treliça de 11 barras – distribuições de material, distribuições da violação das tensões admissíveis e valor das funções de peso no óptimo dos problemas resolvidos pelo MMA.	101

Tabela 6.9: Treliça de 11 barras – parâmetros da otimização.....	101
Tabela 6.10: Treliça de 11 barras – convergência da função objectivo e estratégia de penalização.	102
Tabela 6.11: Treliça de 21 barras – distribuições de material, distribuições da violação das tensões admissíveis e valor das funções de peso no óptimo dos problemas resolvidos pelo MMA.	103
Tabela 6.12: Treliça de 21 barras – parâmetros da otimização.....	104
Tabela 6.13: Treliça de 21 barras – convergência da função objectivo e estratégia de penalização.	104
Tabela 6.14: Treliça de 26 barras – distribuições de material, distribuições da violação das tensões admissíveis e valor das funções de peso no óptimo dos problemas resolvidos pelo MMA.	106
Tabela 6.15: Treliça de 26 barras – parâmetros da otimização.....	106
Tabela 6.16: Treliça de 26 barras – convergência da função objectivo e estratégia de penalização.	107
Tabela 6.17: Treliça de 26 barras - comparação entre as versões (R) e (RP) de duas distribuições de material.	108
Tabela 6.18: Treliça de 36 barras – distribuições de material e funções de peso.	110
Tabela 6.19: Treliça de 36 barras – violação das tensões admissíveis.....	110
Tabela 6.20: Treliça de 36 barras – parâmetros da otimização.....	111
Tabela 6.21: Treliça de 36 barras – convergência da função objectivo e estratégia de penalização.	111
Tabela 6.22: Treliça de 110 barras – distribuições de material e funções de peso.	113
Tabela 6.23: Treliça de 110 barras – violação das tensões admissíveis.	113
Tabela 6.24: Treliça de 110 barras – parâmetros da otimização.	114
Tabela 6.25: Treliça de 110 barras – convergência da função objectivo e estratégia de penalização.	114
Tabela A.1: Tempos de otimização dos problemas resolvidos com o MMA.	131
Tabela B.1: Históricos da violação máxima dos constrangimentos dos problemas das treliças de 3 e 11 barras.....	133
Tabela B.2: Históricos da violação máxima dos constrangimentos dos problemas das treliças de 10 e 21 barras.	134
Tabela B.3: Históricos da violação máxima dos constrangimentos dos problemas das treliças de 26 e 36 barras.	135
Tabela B.4: Históricos da violação máxima dos constrangimentos dos problemas da treliça de 110 barras.....	136
Tabela C.1: Parâmetros das estratégias de penalização dos problemas das treliças de 3, 10, 11 e 21 barras.	137
Tabela C.2: Parâmetros das estratégias de penalização dos problemas das treliças de 26, 36 e 110 barras.	137

INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

Actualmente, com o avanço tecnológico e científico, os engenheiros têm à sua disposição uma panóplia de ferramentas que lhes permite projectar estruturas cada vez mais eficientes, havendo um esforço diário nesse sentido. Com o surgimento do Método dos Elementos Finitos passou a ser possível analisar estruturas realmente complexas a partir de um modelo numérico. Destas análises, é possível avaliar o desempenho dessas estruturas face às condições de apoio e carregamentos impostos, através do cálculo de deslocamentos e posterior avaliação do campo de tensões, por exemplo. A combinação desta ferramenta de análise com técnicas de optimização estrutural permite lidar com problemas verdadeiramente complexos de forma automática e, assim, obter estruturas eficientes.

Uma estrutura reticulada consiste num conjunto de membros estruturais (barras) unidos através das suas extremidades. Estas estruturas, tipicamente metálicas, podem ser encontradas numa grande variedade de aplicações onde geralmente se requer uma distribuição de esforços ao longo de distâncias consideráveis, como por exemplo, em terminais aeroportuários, hangares, coberturas de estádios, auditórios, outros edifícios amplos, ou ainda em chassis.

Os critérios de falha são dos mais utilizados em engenharia, pelo facto de fornecerem informação acerca da integridade de uma estrutura de forma clara. Para além disso, a racionalização dos recursos utilizados é cada vez mais uma preocupação, seja por razões financeiras ou por razões de sustentabilidade ambiental. Com vista a aproveitar ao máximo as potencialidades de uma estrutura, podem ser considerados vários materiais disponíveis para projecto. Deste modo, os membros mais solicitados poderão ser construídos utilizando um material mais resistente e os membros menos solicitados poderão ficar com um material menos resistente, onde o outro material estaria subaproveitado. Desta forma, é do interesse global o desenvolvimento de metodologias que permitam optimizar estruturas de forma expedita, limitando o valor de tensão em cada elemento estrutural e admitindo a possibilidade de utilizar vários materiais. Uma metodologia deste tipo tem potencial de ser aplicável num conjunto muito vasto de estruturas, não necessariamente reticuladas.

1.2 Objectivos

Com esta dissertação pretende-se expandir o conhecimento científico no âmbito do projecto óptimo de estruturas reticuladas com constrangimentos de tensão, considerando múltiplas fases de material, sendo uma de vazio e as restantes de material sólido. Para isso, recorre-se a um método de optimização topológica baseado na variável de densidade artificial. Esta é uma temática que tem um número de contribuições na literatura muito escasso.

Começa-se pela consolidação de conhecimentos de optimização topológica baseada na variável densidade e progride-se para os constrangimentos de tensão, compreendendo-se os desafios inerentes à sua consideração. Posto isto, prossegue-se para o estudo de leis de interpolação de material, que permitem aliar a selecção de materiais ao problema de optimização topológica de determinação da existência ou ausência de material em cada ponto do domínio.

É necessário formular os problemas de optimização topológica de forma matematicamente rigorosa e resolvê-los com recurso a um algoritmo de optimização. Os problemas de optimização são resolvidos a par com sucessivas análises de elementos finitos, que permitem a avaliação do desempenho da estrutura e assim progredir na optimização.

Com a metodologia estabelecida, é necessário testá-la com exemplos numéricos, de maneira a que lhe seja atribuída credibilidade. Atendendo ao carácter exploratório desta dissertação, os exemplos numéricos aqui utilizados são relativamente simples, contudo reconhece-se um enorme potencial no estabelecimento de uma metodologia com estas características para a resolução de problemas de uma complexidade superior.

1.3 Estrutura da dissertação

Esta dissertação encontra-se dividida em 7 capítulos. No presente capítulo, Capítulo 1, começa-se por fazer uma introdução ao tema da dissertação, evidenciando motivações para a realização deste estudo e definindo os objectivos necessários.

No Capítulo 2, Estado da Arte, é feita uma revisão literária das temáticas necessárias ao desenvolvimento desta dissertação. Começa-se por fazer um enquadramento da optimização estrutural, desde o seu surgimento até ao papel que desempenha no projecto moderno. De seguida, dentro do tema da optimização topológica, é dado particular destaque à consideração de constrangimentos de tensão e à consideração de múltiplas fases de material, fazendo-se uma revisão das leis de interpolação de material disponíveis na literatura.

No Capítulo 3, são apresentados, os Fundamentos de otimização de maior relevância no contexto desta dissertação. Apresentam-se os algoritmos de otimização utilizados e detalham-se metodologias disponíveis para o cálculo de sensibilidades, apontando vantagens e desvantagens em cada uma delas.

A formulação dos problemas de otimização resolvidos nesta dissertação consta no Capítulo 4. De forma progressiva e fundamentada, apresentam-se todas as decisões tomadas até se atingir uma formulação definitiva.

Definida a formulação dos problemas e sendo utilizado um algoritmo baseado na informação do gradiente, no Capítulo 5 o Cálculo de sensibilidades é exposto detalhadamente.

A formulação proposta foi testada com 7 exemplos numéricos, sendo que os resultados obtidos são apresentados no Capítulo 6. Neste capítulo os resultados são apresentados por ordem crescente de complexidade, desde uma treliça de 3 barras até uma de 110 barras.

Por fim, no Capítulo 7, é feito um balanço do trabalho desenvolvido, sendo tiradas conclusões relativamente a todos os aspectos considerados relevantes. Reconhecendo o potencial deste trabalho, termina-se esta dissertação com a apresentação de propostas para trabalhos futuros.

ESTADO DA ARTE

2.1 Apontamento histórico sobre Optimização Estrutural

Na sua génese, a optimização estrutural consiste em melhorar o desempenho global de uma estrutura, ao determinar um conjunto de parâmetros (*e.g.* dimensões, forma, densidade, orientação de fibras de materiais compósitos), formalmente conhecidos como variáveis de projecto, que minimizam ou maximizam uma determinada função objectivo (*e.g.* peso, rigidez, estabilidade, frequência natural), sem violar as restrições impostas por constrangimentos (*e.g.* tensão admissível, deslocamento admissível, volume). O valor óptimo das variáveis de projecto é obtido dentro de um espaço de soluções admissíveis, após várias iterações controladas por um algoritmo de optimização.

A comunidade científica tem demonstrado interesse nesta área desde a última década do Séc. XIX, com a publicação dos trabalhos de Maxwell em 1890 [66] e Michell em 1904 [67]. Contudo, só se começaram a verificar fortes avanços em optimização estrutural a partir da década de 1950. Os primeiros computadores digitais, surgidos no início da década de 1950, constituíram uma ferramenta indispensável ao desenvolvimento de métodos numéricos de Programação Linear [27], o que permitiu a resolução de problemas de optimização estrutural aplicados a estruturas reticuladas.

No final da década de 1950, com a exploração espacial em vista, fizeram-se grandes investimentos em projectos de investigação na área da optimização estrutural, pois havia a necessidade de obter estruturas tão leves quanto possível. Para além dos progressos tecnológicos feitos ao nível da informática, registaram-se fortes avanços na área dos métodos numéricos aplicados à mecânica estrutural, nomeadamente com a descoberta do Método dos Elementos Finitos (MEF), o que possibilitou a análise de estruturas realmente complexas pela primeira vez. De acordo com Reddy [74], embora os fundamentos do MEF constem nos trabalhos de Hrenikoff [47] e Courant [26], a apresentação formal deste método é atribuída a Argyris & Kelsey [6] e Turner et al. [99]. Em 1960, Clough [21] utiliza o termo “elemento finito” pela primeira vez e, nesse mesmo ano, Schmit [82] viria a revolucionar o projecto óptimo de estruturas, por ser o primeiro a combinar o MEF com métodos numéricos de optimização.

Durante as décadas de 1970 e 1980 registaram-se avanços substanciais nos métodos numéricos de Programação Não Linear, destacando-se a Programação Quadrática Sequencial (SQP) [81] ou o Método das Assíptotas Móveis (MMA) [96], o que possibilitou a resolução de problemas de optimização ainda mais complexos.

Os métodos anteriormente referidos, apesar de terem impulsionado a resolução de problemas de optimização contínua, perdem aplicabilidade na resolução de problemas discretos ou mistos. As Meta-Heurísticas [37], onde se enquadram, por exemplo, os Algoritmos Genéticos (AG), surgiram como possível ferramenta na resolução problemas de optimização discreta.

Um problema de optimização estrutural enquadra-se tipicamente numa das seguintes três categorias: (1) optimização dimensional (*sizing optimization*), (2) optimização de forma (*shape optimization*) e (3) optimização topológica (*topology optimization*), exemplificadas na Figura 2.1 com uma viga em consola sujeita a uma carga pontual. As variáveis de projecto podem ser de natureza discreta, contínua ou booleana.

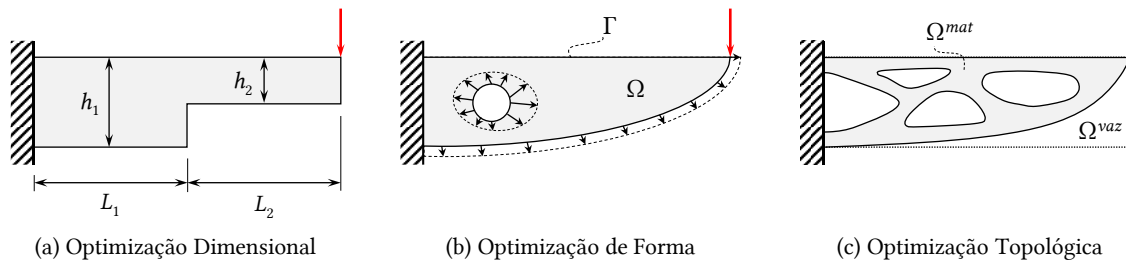


Figura 2.1: Principais categorias de optimização estrutural aplicadas numa viga em consola.

Até ao final da década de 1960, os problemas de optimização estrutural eram resolvidos recorrendo sobretudo à optimização dimensional. Tipicamente, as variáveis de projecto são dimensões geométricas de uma estrutura, como por exemplo áreas de secções transversais de barras, comprimentos, espessuras ou alturas. Relativamente às restantes categorias, a sua implementação é feita de forma mais expedita, contudo, a optimização dimensional é também a mais restritiva, pelo facto de ser realizada com forma e topologia fixas. Assim, a solução óptima encontrada para um problema resolvido exclusivamente por optimização dimensional é, muito provavelmente, sub-óptima.

Os primeiros trabalhos a abordar a optimização de forma começaram a surgir durante a década de 1970, estando a maioria focados na minimização da concentração de tensões em torno de furos ou boleados [34, 43, 112]. Na optimização de forma as variáveis de projecto são

contínuas e estão relacionadas com a fronteira Γ delimitadora do domínio Ω da estrutura definida por um conjunto de pontos, linha ou superfície. Esta fronteira, que poderá ser uma linha ou superfície, é definida por funções matemáticas contínuas, sendo as variáveis de projecto os parâmetros analíticos que governam essas funções. Na optimização de uma placa com um furo, as vantagens da optimização de forma face à optimização dimensional são evidentes. Com esta última, a solução seria encontrada aumentando uma variável dimensional como a espessura da chapa. Já com a optimização de forma, a concentração de tensões é minimizada variando a forma do furo, pelo que a solução final obtida é mais leve e, portanto, mais eficiente. Apesar da optimização de forma permitir melhorias significativas ao nível da geometria de estruturas, o resultado depende fortemente da topologia inicial, o que faz com que a solução óptima seja, mais uma vez, sub-óptima.

A optimização topológica é, das três categorias, a mais poderosa, pelo facto de não assumir *a priori* quaisquer parâmetros relacionados com dimensões geométricas ou forma da estrutura. Deste modo, as soluções obtidas por optimização dimensional ou de forma num dado problema fazem parte do conjunto de soluções admissíveis do mesmo problema resolvido por optimização topológica. Na sua essência, consiste em preencher uma área ou volume fixos (domínio Ω) com uma certa quantidade de material disponível, através de sucessivas remoções de pequenas porções desse material onde este não tem um papel significativo no desempenho da estrutura. Como resultado, obtém-se um domínio de material contido no domínio inicial, $\Omega^{mat} \subseteq \Omega$, que representa a estrutura com o *layout* óptimo, sendo que esta pode apresentar perfurações que são parte constituinte do domínio de vazio, Ω^{vaz} , de tal forma que $\Omega^{mat} \cup \Omega^{vaz} = \Omega$.

A ideia básica da optimização topológica pode talvez remontar ao trabalho pioneiro de Maxwell em 1890 [66], onde foram estudadas treliças estaticamente determinadas de forma analítica. Cerca de 70 anos mais tarde, em 1964, Dorn et al. [30] introduziu uma nova metodologia para a optimização topológica de estruturas reticuladas, designada por *Ground Structure Approach*. A ideia básica desta abordagem consiste em partir de um determinado conjunto de nós e elementos de barra ou viga (associados a um número geralmente elevado de conectividades) e determinar a distribuição de material mais eficiente. Para isso, podem ser utilizadas variáveis de natureza booleana (0 ou 1) para modelar a conectividade entre cada par de nós, sendo que ausência e presença de cada elemento são representadas pelos valores 0 e 1, respectivamente. Podem também ser consideradas variáveis contínuas para representar, por exemplo, o valor da área de cada uma das secções transversais dos elementos estruturais, ficando a ausência de material associada a um valor de área nulo. Na Figura 2.2 apresentam-se dois exemplos de *Ground Structure* para um domínio rectangular de 15 nós. No primeiro caso conectam-se apenas

elementos presentes no mesmo quadrado 1×1 , enquanto que no segundo são consideradas todas as conectividades possíveis.

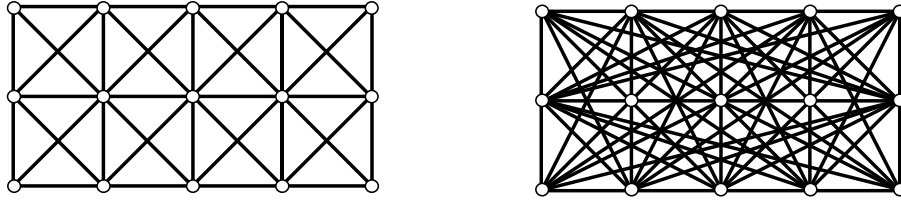


Figura 2.2: Exemplos de *Ground Structure* para um domínio rectangular de 15 nós. (Adaptado de [11])

Contudo, só no final da década de 1980, com a publicação do trabalho de Bendsøe & Kikuchi [10] se deu início à optimização topológica como nova área de investigação. Neste trabalho os autores desenvolveram o método da homogeneização e optimizaram um meio contínuo, distribuindo racionalmente pelo seu domínio um modelo de material compósito de microestrutura periódica, cujas propriedades elásticas são calculadas pela teoria da homogeneização. Uma implementação computacional desta teoria considerando um modelo de material compósito de microestrutura periódica pode ser consultada no trabalho de Guedes & Kikuchi [39].

2.2 Optimização Estrutural no projecto moderno

Através de uma formulação matemática rigorosa, a optimização estrutural é um forte aliado no projecto de estruturas complexas, pois permite lidar com um grande número de variáveis de projecto e constrangimentos, algo que seria impraticável seguindo uma metodologia de projecto tradicional. A elaboração de um projecto seguindo uma metodologia tradicional está fortemente dependente do conhecimento e experiência dos engenheiros projectistas que, após um processo iterativo com base em tentativa e erro, alcançam eventualmente uma boa solução. Embora esta solução cumpra todos os requisitos de projecto, está afastada daquela que seria a solução óptima, na grande maioria das vezes. A adopção de técnicas de optimização estrutural em ambiente industrial permite sistematizar o projecto tradicional e torná-lo mais eficiente, o que possibilita uma economia de custos temporais e financeiros significativa. Na Figura 2.3 pretende-se esquematisar a relação entre as diferentes categorias de optimização estrutural com as várias fases do projecto.

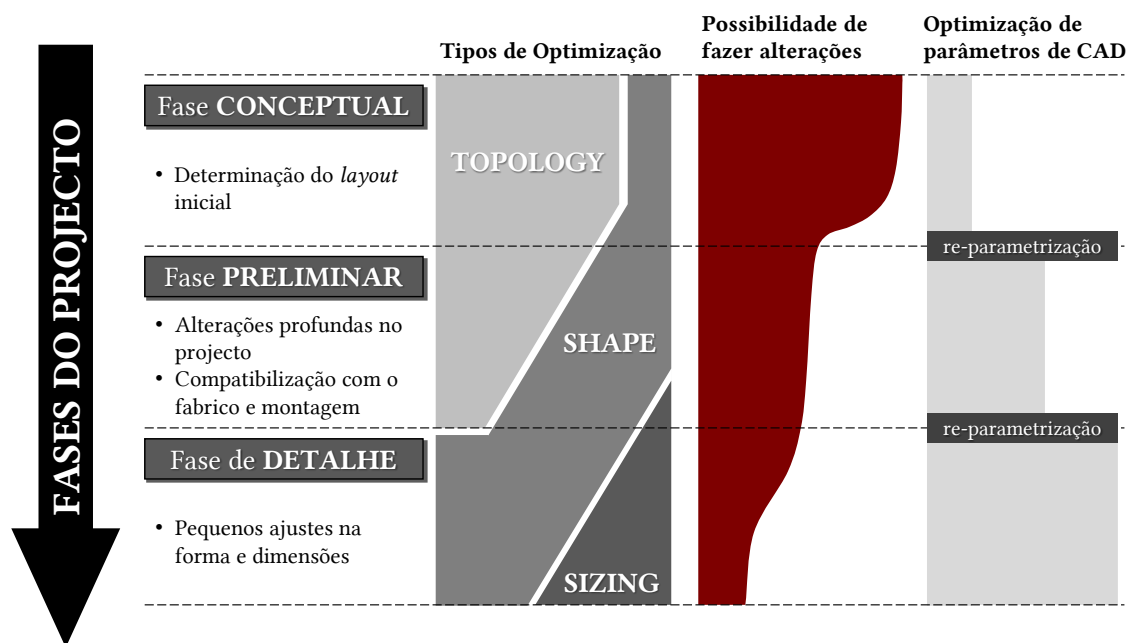


Figura 2.3: Enquadramento das categorias de optimização estrutural nas diferentes fases do projecto de estruturas. (Adaptado de [22])

Um projecto começa na sua fase conceptual, onde apenas se conhecem as condições de fronteira e se estipula um domínio, bidimensional ou tridimensional, onde se pretende distribuir material de forma eficiente. Para se ter uma ideia genérica da distribuição de material mais eficiente, faz-se uma modelação computacional do domínio disponível recorrendo a ferramentas de *Computer-Aided Design* (CAD) e utiliza-se a optimização topológica.

Avança-se então para uma fase preliminar, onde se começa a delinear um projecto a partir do resultado obtido por optimização topológica, que deve ser interpretado e modelado computacionalmente. Há que ter em conta as restrições impostas pelos processos de fabrico disponíveis e ainda eventuais restrições ao nível da sua montagem, o que muitas vezes requer alterações significativas ao nível da forma da estrutura, variando a fronteira delimitadora do subdomínio ocupado por material, com recurso à optimização de forma.

Na fase de detalhe a topologia está fixa e a forma está praticamente definida, sendo que as modificações a fazer estão relacionadas com pequenos pormenores dimensionais, recorrendo-se sobretudo à optimização dimensional. Por fim, a estrutura final deverá ser testada com recurso a simulações numéricas e, caso seja estritamente necessário, através de testes físicos que assegurarão a integridade estrutural do produto final quando sujeito aos carregamentos para os quais foi projectado.

Actualmente, a optimização estrutural é uma ferramenta cada vez mais utilizada na indústria dos transportes, com maior incidência nas indústrias aeronáutica e aeroespacial, onde está bem patente a necessidade em obter estruturas tão leves quanto possível.

O projecto das nervuras do bordo de ataque (*leading edge ribs*, Figura 2.4) e dos reforços das portas da fuselagem (*fuselage door intercostals*) do Airbus A380, maior avião de passageiros do mundo, é um exemplo de aplicação real de optimização estrutural. Primeiramente, considerando uma formulação de minimização da energia de deformação global (*compliance*), realizou-se optimização topológica considerando constrangimentos de deslocamento, tensão e encurvadura. Após interpretação dos resultados obtidos e estabelecimento de uma malha de elementos finitos detalhada, recorreu-se à optimização dimensional e de forma. Como resultado, conseguiu-se uma redução no peso do avião em cerca de 1000 kg [56]. A longo prazo, a economia de combustível e a redução das emissões de CO₂ associadas a esta medida são muito significativas.



Figura 2.4: *Leading edge ribs* utilizadas no Airbus A380. (Extraído de [84])

O projecto conceptual do *pylon* do Airbus A350 XWB (*eXtra Wide Body*), avião de passageiros de longo curso *state of the art*, é um outro exemplo. Este componente tem a função de fazer a ligação estrutural entre o motor e a asa do avião. Com recurso a optimização topológica e com os objectivos de minimizar a massa e o atrito resultante da resistência do ar, o *layout* óptimo obtido representou apenas 10% do domínio inicial [75] – Figura 2.5. Para uma revisão de aplicações da optimização topológica no projecto conceptual de aeronaves e estruturas aeroespaciais faz-se referência ao trabalho de Zhu, Zhang & Xia [111].



Figura 2.5: Optimização topológica do *pylon* do Airbus A350 XWB. (Adaptado de [75] e [5])

No âmbito da indústria automóvel faz-se referência, por exemplo, ao trabalho recente de Lu et al. [62], onde os autores aplicaram optimização topológica multimaterial à estrutura interna de um autocarro vulgar, com o objectivo de reduzir a sua massa, tendo em conta a rigidez global e as frequências naturais da estrutura. Partindo de uma estrutura inicial constituída por 358 vigas em aço, obteve-se uma solução óptima (Figura 2.6) constituída por vigas de alumínio e de aço com uma massa 39.65% inferior, em que 19 das 358 vigas iniciais foram removidas. Tomando agora este resultado como ponto de partida, os autores realizaram ainda optimização dimensional das áreas das secções transversais das vigas, o que permitiu economizar mais 39.47% da massa, relativamente ao resultado anterior.

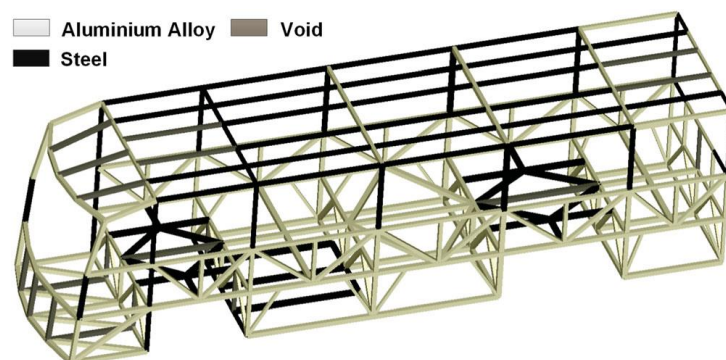


Figura 2.6: Topologia óptima da estrutura interna do autocarro apresentado em [62].

2.3 Optimização topológica

Na sua essência, a optimização topológica é um problema de distribuição de material de natureza discreta governado por variáveis booleanas (0 ou 1), pretendendo-se determinar a presença (1) ou ausência (0) de material em todos os pontos de um dado domínio. A resolução de um problema deste tipo fica restrita à utilização de métodos de programação inteira ou meta-heurísticas (como o algoritmo genético [45], AG). Contudo, a utilização destes métodos em optimização topológica está acompanhada de duas grandes desvantagens: (1) custo computacional muito elevado para um número razoável de variáveis de projecto e (2) obtenção de soluções desconexas e/ou perfuradas que podem implicar instabilidades numéricas, como resultado de uma remoção de material discreta. Desta forma, é do interesse global o desenvolvimento de ferramentas que permitam reformular o problema discreto e torná-lo num problema contínuo, resolúvel por métodos de optimização baseados em informação do gradiente.

Desde a publicação do trabalho de Bendsøe & Kikuchi em 1988 [10], a optimização topológica ramificou-se em diversas abordagens para fazer face a este problema. Os métodos baseados na variável densidade [9, 68, 109], onde se enquadra esta dissertação, são aqueles que se encontram mais documentados na literatura e têm obtido mais popularidade desde há cerca de 30 anos. Contudo, métodos como o *level-set method* (LSM) [3, 29, 83, 103], *phase-field method* (PFM) [13], métodos baseados na variável topológica [87], de entre outros, têm também permitido a obtenção de resultados muito interessantes. Para revisões relativamente recentes das diferentes abordagens disponíveis para realizar optimização topológica faz-se referência aos trabalhos de Sigmund & Maute [85] e Deaton & Grandhi [28].

Nesta secção, começa-se por apresentar o problema de optimização topológica do ponto de vista discreto (2.3.1). No ponto 2.3.2 exploram-se os métodos baseados na variável densidade, com a apresentação de duas abordagens possíveis: SIMP¹ e RAMP². De seguida, trata-se do tema dos constrangimentos de tensão. São apresentados os desafios associados a este tipo de constrangimento, as possíveis soluções e, a título demonstrativo, aplicam-se estes conceitos na optimização de uma treliça simples – (2.3.3). Por último, em 2.3.4 aborda-se o tema da optimização topológica com múltiplas fases de material e são apresentadas diversas leis de interpolação de material, aplicáveis com métodos baseados na variável densidade.

¹ SIMP: *Solid Isotropic Material with Penalization*

² RAMP: *Rational Approximation of Material Properties*

2.3.1 Formulação do problema discreto

No decorrer desta dissertação consideram-se materiais isotrópicos com comportamento linear elástico, pelo que a relação existente entre o tensor das tensões, σ_{ij} (em notação indicial), e o tensor das deformações ϵ_{kl} é dada pela seguinte equação constitutiva (Lei de Hooke):

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.1)$$

em que E_{ijkl} é o tensor de rigidez de 4ª ordem do material, sendo constituído por 81 coeficientes elásticos que descrevem o comportamento do material em todas as direcções. Devido à simetria dos tensores das tensões e extensões, o número de coeficientes a determinar reduz para 36. Utilizando notação de Voigt-Kelvin, é possível agrupar as diferentes 6 componentes dos tensores das tensões e extensões em dois vectores e as 36 componentes do tensor de rigidez numa matriz 6×6 . Recorrendo ao conceito de energia de deformação elástica e após algumas manipulações algébricas chega-se a um resultado que prova a existência de simetria nesta matriz 6×6 , pelo que o número de coeficientes a determinar reduz-se para 21. No caso de um material isotrópico, caracterizado por infinitos planos de simetria elástica, esse número reduz-se para 2 coeficientes: módulo de Young E e módulo de distorção G . Em barras, onde apenas se consideram esforços axiais, o conhecimento do módulo de distorção é irrelevante, ficando apenas a importar o módulo de Young do material.

Comece-se por considerar um domínio Ω que representa uma área ou volume fixos. Para obter a distribuição óptima de material no domínio Ω é necessário determinar a que subdomínio, Ω^{mat} ou Ω^{vaz} , pertence cada um dos pontos \mathbf{s} desse domínio. Desta forma, introduz-se uma função degrau $\varphi(\mathbf{s})$,

$$\varphi(\mathbf{s}) = \begin{cases} 1 & , \quad \mathbf{s} \in \Omega^{mat} \\ 0 & , \quad \mathbf{s} \in \Omega \setminus \Omega^{mat} \end{cases} \quad (2.2)$$

O tensor de rigidez E_{ijkl} passa a apresentar dependência relativamente à função degrau $\varphi(\mathbf{s})$, que varia dentro do domínio Ω ,

$$E_{ijkl}(\varphi(\mathbf{s})) = \varphi(\mathbf{s}) E_{ijkl}^{(1)} \quad (2.3)$$

em que $E_{ijkl}^{(1)}$ é o tensor de rigidez do material que se pretende distribuir pelo domínio. O volume ou área do domínio de material $|\Omega^{mat}|$ é dado por,

$$|\Omega^{mat}| = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{s}) d\Omega \quad (2.4)$$

Do ponto de vista de uma formulação de elementos finitos, em que o domínio Ω é discretizado em n^e elementos finitos, as equações de equilíbrio do sistema passam a apresentar dependência relativamente à função degrau φ da seguinte maneira,

$$\mathbf{K}(\mathbf{E}_e(\varphi))\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{com} \quad \mathbf{K}(\mathbf{E}_e(\varphi)) = \sum_{e=1}^{n^e} \mathbf{K}_e(\mathbf{E}_e(\varphi)) \quad (2.5)$$

\mathbf{K} representa a matriz de rigidez global do sistema, \mathbf{u} o vector de deslocamentos e \mathbf{f} o vector dos carregamentos exteriormente aplicados. \mathbf{K} resulta da assemblagem (aqui representada com uma notação de somatório) das matrizes de rigidez de cada elemento e , \mathbf{K}_e , que por sua vez dependem do tensor de rigidez desse elemento, \mathbf{E}_e . E ainda,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e &= \varphi_e \mathbf{E}^{(1)} \\ |\Omega^{mat}| &= \sum_{e=1}^{n^e} \varphi_e |\Omega|_e \end{aligned} \quad (2.6)$$

em que φ_e e $|\Omega|_e$ representam o valor da função degrau e a área ou volume do elemento finito e , respectivamente.

A minimização da *compliance*, C , de uma estrutura considerando um constrangimento que impõe uma fracção de área ou volúmica máxima, V^* , é um problema muito comum e amplamente documentado em optimização topológica. Pretende-se obter a estrutura mais rígida para um conjunto de carregamentos aplicados e condições de apoio, *i.e.* a estrutura com o menor valor global de energia de deformação (*compliance*).

Seguindo uma formulação standard (secção 3.1), esse tipo de problemas pode ser formulado de forma genérica,

$$\begin{aligned}
& \min_{\varphi_e} C = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\
& \text{s.a.} \quad \begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad , \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{E}_e(\varphi_e)) \\ \sum_{e=1}^{n^e} \varphi_e |\Omega|_e - V^* \leq 0 \\ \varphi_e \in \{0,1\} \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

O problema que se apresenta na equação (2.7) pode então ser resolvido por métodos não baseados no gradiente, capazes de lidar com variáveis de projecto discretas. Contudo, há que fazer uma ressalva relativamente à equação (2.3). Note-se que esse resultado é um caso particular da equação (2.8),

$$E_{ijkl}(\varphi(\mathbf{s})) = E_{ijkl}^{(2)} + \varphi(\mathbf{s})(E_{ijkl}^{(1)} - E_{ijkl}^{(2)}) \tag{2.8}$$

em que $E_{ijkl}^{(2)}$ é o tensor de rigidez associado a um outro material. Desta forma, o problema de distribuição de um material num dado domínio Ω pode ser visto como um caso particular da distribuição de dois materiais, em que $\Omega = \Omega^{mat1} \cup \Omega^{mat2}$. No caso de se ter à disposição apenas uma fase de material sólido considera-se $E_{ijkl}^{(2)} = 0$ para representar a fase de vazio e a equação (2.8) reduz-se à equação (2.3). No entanto, veja-se que $E_{ijkl}^{(2)} = 0$ resulta numa matriz de rigidez singular, o que inviabiliza a resolução das equações de equilíbrio do sistema. Desta forma, deve-se considerar que $E_{ijkl}^{(2)}$ representa um material muito flexível, *i.e.* as componentes do tensor de rigidez devem ser próximas de zero ou de um valor suficientemente baixo no contexto do problema, mas nunca nulas.

2.3.2 Métodos baseados na variável densidade

Actualmente, os métodos baseados na variável densidade são a abordagem mais comum na resolução de problemas de optimização topológica. Têm por detrás a transformação do problema discreto (0 ou 1) num problema relaxado de variáveis contínuas, fazendo com que este fique resolúvel por métodos baseados no gradiente. Do ponto de vista de uma discretização de elementos finitos, essa transformação consiste em substituir a função degrau φ_e por uma função de peso contínua w_e no domínio de cada elemento e . Essa função w_e depende de uma variável de densidade artificial x_e , que toma valores entre 0 e 1 e que se caracteriza pelo facto de enviar,

de alguma forma, os valores intermédios de densidade para os valores discretos 0 ou 1, ou seja, desfavorece os valores intermédios. A função de peso associada a cada fase de material não deve nunca ultrapassar a unidade, uma vez que isso significaria que o material seleccionado contribuiria com propriedades superiores às dos materiais disponíveis para projecto. Para além disso, deve ser sempre positiva, uma vez que uma propriedade negativa não tem significado físico.

2.3.2.1 Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)

Pouco depois da publicação do trabalho de Bendsøe & Kikuchi [10], Bendsøe em 1989 [9] e, mais tarde, Zhou & Rozvany [109] e Mlejnek [68] sugeriram a abordagem SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), também conhecida por *power-law approach*. Neste tipo de abordagem, o tensor de rigidez ou a propriedade do material que se pretenda interpolar são dados por:

$$E_e(x_e) = \underbrace{(x_e^p)}_{w_e} E^{(1)} \quad , \quad p \geq 1 \quad \wedge \quad x_e \in]0,1] \quad (2.9)$$

em que E_e pode representar, por exemplo, o módulo de Young no elemento e , $E^{(1)}$ o módulo de Young do material a ser distribuído pelo domínio e p é um expoente de penalização. Realça-se o facto da variável x_e não tomar o valor nulo, mais uma vez para prevenir a existência de matrizes singulares. O cálculo da área ou volume do domínio ocupado por material faz-se de acordo com a equação (2.10),

$$|\Omega^{mat}| = \sum_{e=1}^{n^e} x_e |\Omega|_e \quad (2.10)$$

Como se pode observar, existe uma dependência linear entre o valor da área ou volume e as variáveis de projecto. Desta forma, para $p > 1$, o módulo de Young associado a densidades intermédias pode ser consideravelmente penalizado, enquanto que a contabilização da quantidade de material permanece inalterada. Assim, valores intermédios de densidade estão associados a um material fictício com um fraco compromisso entre a sua rigidez e a quantidade de material utilizado e, portanto, ineficiente.

À semelhança do que se apresenta na equação (2.8), a equação (2.9) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$E_e(x_e) = E^{(2)} + x_e^p (E^{(1)} - E^{(2)}) \quad , \quad \begin{cases} p \geq 1 \\ x_e \in]0,1] \\ E^{(1)} > E^{(2)} \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} p \geq 1 \\ x_e \in [0,1] \\ E^{(1)} > E^{(2)} > 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

em que $E^{(2)}$ é o módulo de Young associado a um outro material. Para representar uma fase de vazio, uma vez que existe um limite inferior maior do que 0 para a variável x_e , $E^{(2)}$ pode ser nulo. No entanto, muitas vezes selecciona-se para $E^{(2)}$ um valor não nulo algumas ordens de grandeza abaixo do valor de $E^{(1)}$ para representar uma fase de vazio, dependendo do problema. Nesse caso, o limite inferior das variáveis de projecto poderá ou não ser nulo.

Em 1999, Bendsøe & Sigmund [12], atribuíram um significado físico à rigidez resultante de um modelo SIMP, na medida em que esta pode ser interpretada como a rigidez de um material compósito constituído por uma fase de vazio e uma fase de material sólido à fracção volumica obtida pelo modelo SIMP, equivalente ao valor de w_e .

2.3.2.2 Rational Approximation of Material Properties (RAMP)

Em 2001, Stolpe & Svanberg [93] apresentaram um novo modelo de interpolação de material como alternativa ao já existente SIMP. Nesta abordagem, conhecida por RAMP (*Rational Approximation of Material Properties*), as propriedades do material num elemento são dadas por,

$$E_e(x_e) = E^{(2)} + \frac{x_e}{1+q(1-x_e)} (E^{(1)} - E^{(2)}) \quad , \quad \begin{cases} q \geq 0 \\ x_e \in]0,1] \\ E^{(1)} > E^{(2)} \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} q \geq 0 \\ x_e \in [0,1] \\ E^{(1)} > E^{(2)} > 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

onde q é um parâmetro finito. Para $q > 0$, a selecção de densidades intermédias fica desfavorecida, à semelhança do que acontece no modelo SIMP para $p > 1$. As diferenças entre estes dois modelos advêm das respectivas funções de peso w_e , neste caso representada por uma função racional controlada pelo parâmetro q . Na Figura 2.7 apresenta-se uma comparação entre os dois modelos utilizando expoentes p e parâmetros q equivalentes para $x_e = 0.5$. Como se pode observar, o modelo SIMP é mais efectivo a penalizar valores intermédios mais elevados ($x_e > 0.5$), enquanto que o modelo RAMP penaliza mais eficazmente valores intermédios mais baixos ($x_e < 0.5$), no entanto esta diferença não parece surtir efeitos práticos [85].

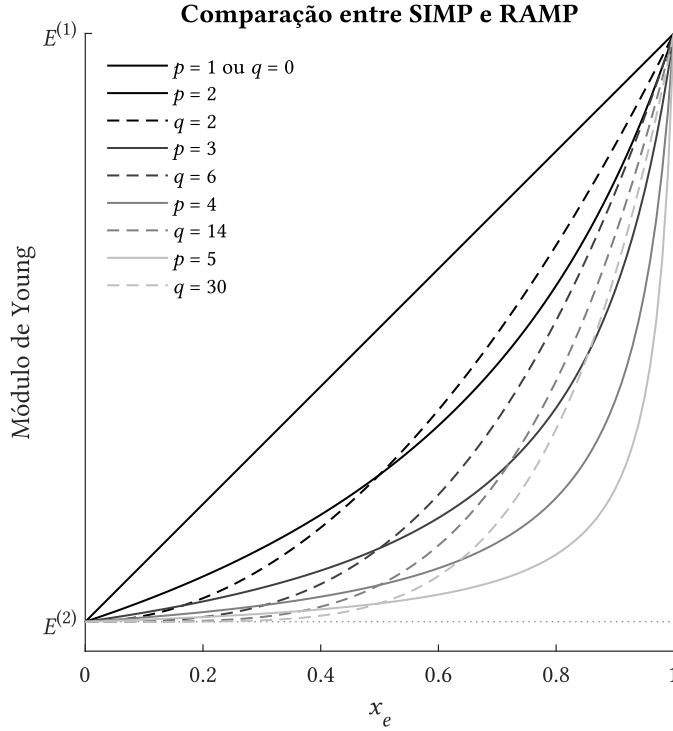


Figura 2.7: Comparação do efeito de diferentes expoentes de penalização p e parâmetros q equivalentes (para $x_e = 0.5$) nas leis SIMP e RAMP, respectivamente.

Uma outra diferença entre estes dois modelos está relacionada com a continuidade das suas derivadas. Denotando E_{SIMP} como o 2º membro da equação (2.11) e E_{RAMP} como o 2º membro da equação (2.12) tem-se,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial E_{SIMP}}{\partial x_e} \right|_{x_e=0} &= \begin{cases} E^{(1)} - E^{(2)} & , \quad p=1 \\ 0 & , \quad p>1 \end{cases} & \left. \frac{\partial E_{SIMP}}{\partial x_e} \right|_{x_e=1} &= p(E^{(1)} - E^{(2)}) \\ \left. \frac{\partial E_{RAMP}}{\partial x_e} \right|_{x_e=0} &= \frac{1}{1+q}(E^{(1)} - E^{(2)}) & \left. \frac{\partial E_{RAMP}}{\partial x_e} \right|_{x_e=1} &= (1+q)(E^{(1)} - E^{(2)}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Enquanto que o modelo RAMP tem derivada contínua qualquer que seja o valor de x_e e do parâmetro q , a derivada do modelo SIMP é descontínua no expoente p para $x_e = 0$. Para além disso, o facto da derivada do modelo SIMP ser nula em $x_e = 0$ pode influenciar a convergência do algoritmo de optimização [85].

A escolha do expoente de penalização p ou do parâmetro q deve ser feita com base no problema a ser resolvido. Por um lado, um expoente demasiado baixo vai estar associado a uma maior tolerância a densidades intermédias e, como tal, a resultados com fraco significado físico. Por outro lado, se o valor do expoente for demasiado elevado, o algoritmo de optimização pode

convergir prematuramente para mínimos locais, ou ainda deparar-se com instabilidades numéricas.

2.3.2.3 Formulação do problema relaxado

Com a introdução de variáveis de densidade artificial, o problema discreto de minimização da *compliance* pode ser reformulado e resolvido no domínio contínuo, tal como se apresenta na equação (2.14).

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, x_e \in [0,1]} \quad & C = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ \text{s.a.} \quad & \begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad , \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{E}_e(x_e)) \\ \sum_{e=1}^{n^e} x_e |\Omega|_e - V^* \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Esta formulação é independente dos modelos SIMP e RAMP e pode assemelhar-se a outras formulações que não envolvam a *compliance*. Por exemplo, em problemas de minimização da massa com constrangimentos de tensão (caso desta dissertação), a introdução de variáveis de densidade artificial transforma assim também um problema discreto num problema contínuo e diferenciável.

O facto da função *compliance* ser convexa para $p = 1$ (demonstrado em [95]) motivou o surgimento de uma abordagem conhecida como *continuation approach*, que consiste em iniciar o problema de optimização na sua forma não penalizada ($p = 1$ ou $q = 0$) e aumentar gradualmente p ou q à medida que o número de iterações avança. Desta forma, existe uma maior probabilidade de o algoritmo de optimização escapar a mínimos locais. Este tipo de abordagem é igualmente válido para outro tipo de formulações, pois qualquer que seja o problema em questão, o aumento da penalização de densidades intermédias vai inevitavelmente modificar a convexidade das funções de resposta, tornando-as menos suaves, o que condiciona a trajectória tomada pelos métodos baseados no gradiente.

2.3.2.4 Penalização explícita de densidades intermédias

Como alternativa ou complemento à penalização implícita de densidades, pode ser considerado um termo de penalidade na função objectivo, que será tanto maior quanto mais intermédio for o valor das variáveis de projecto,

$$\alpha \int_{\Omega} (\bar{x} - x_e)(x_e - \underline{x}) d\Omega \quad (2.15)$$

em que α é uma constante de penalização, que poderá ser sujeita a um aumento gradual, pelas mesmas razões apresentadas anteriormente. Do ponto de vista de um modelo de elementos finitos, o termo de penalidade pode ser simplificado da seguinte forma:

$$\alpha \left[\sum_{e=1}^{n^e} (\bar{x} - x_e)(x_e - \underline{x}) |\Omega_e| \right] \quad (2.16)$$

Esta estratégia foi essencialmente desenvolvida por Allaire & Francfort [2] e Allaire & Kohn [4], contudo não recebeu grande aceitação. As suas desvantagens prendem-se com o facto de haver uma grande dependência da constante α de problema para problema e ainda com a trajectória associada a uma solução óptima global. Mesmo com um aumento gradual da constante de penalização, não é possível garantir uma trajectória contínua para o óptimo global, o que faz com que o algoritmo convirja para um mínimo local na grande maioria das vezes, ou fique de alguma forma restringido por algum constrangimento, tal como se verificou numa fase inicial do desenvolvimento desta dissertação.

2.3.3 Constrangimentos de tensão

A imposição de constrangimentos de tensão na formulação de um problema de minimização do volume ou massa de uma estrutura é uma prática com grande relevância em contextos reais, uma vez que a tensão é um dado que evidencia de forma clara a eficiência de uma estrutura com base em critérios de falha (e.g. von-Mises). Os problemas de minimização da *compliance* com constrangimentos de volume ou massa permitem produzir resultados muito interessantes quando se pretendem reduzir deslocamentos e têm ainda a particularidade de, para um caso de carga, a distribuição de tensões obtida ser praticamente um *Fully Stress Design* (e.g. [76, 77, 79]), i.e. o valor da tensão em cada membro da estrutura está praticamente no valor de tensão admissível para esse membro. Contudo, tal como apresentado por Rozvany & Birker [79], o *layout* da estrutura mais rígida não coincide com o da estrutura mais resistente na grande maioria das vezes, principalmente quando se consideram vários casos de carga, diferentes tensões admissíveis à tracção e à compressão, ou ainda quando se consideram vários materiais [32].

Um constrangimento de tensão pode ser expresso na sua forma mais genérica, tal como se apresenta na equação (2.17),

$$g = \frac{\sigma_e}{\bar{\sigma}_e} - 1 \leq 0 \quad (2.17)$$

em que σ_e é a tensão lida no elemento e e $\bar{\sigma}_e$ é a tensão admissível nesse elemento. No entanto, assumindo tensões admissíveis de tracção e compressão idênticas, um constrangimento deste tipo não permite lidar de forma equitativa com estes dois estados de tensão. A medida mais imediata para ultrapassar este problema seria substituir σ_e pelo seu valor absoluto, $|\sigma_e|$,

$$g = \frac{|\sigma_e|}{\bar{\sigma}_e} - 1 \leq 0 \quad (2.18)$$

Mas isso traz um novo problema. Quando se lida com métodos de optimização baseados no gradiente é desejável que a função objectivo e constrangimentos do problema sejam funções contínuas e diferenciáveis em todos os pontos [7], o que não se verifica com a função módulo. Uma alternativa possível é a substituição de σ_e pelo quadrado do seu valor, σ_e^2 , que é uma função contínua e diferenciável. Desta forma, sem alterar drasticamente o constrangimento de

tensão, suaviza-se o eventual ponto em que um elemento estrutural alterna entre o estado de tracção e compressão durante a optimização,

$$g = \left(\frac{\sigma_e}{\bar{\sigma}_e} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad (2.19)$$

Existem três principais dificuldades associadas à consideração deste tipo de constrangimentos: (1) comportamento altamente não linear da função tensão, (2) natureza local dos constrangimentos de tensão e (3) fenómeno da singularidade. De seguida explica-se melhor cada uma destas dificuldades.

Comportamento altamente não linear da função tensão

A função tensão apresenta um comportamento altamente não linear, com particular incidência em regiões com coeficientes de concentração de tensões elevados, como reentrâncias ou furos. Em optimização topológica, a tensão é extremamente sensível relativamente às variáveis de projecto (*e.g.* densidade), sendo de esperar que ocorram erros relacionados com a discretização do domínio ou com o grau das funções de forma dos elementos finitos utilizados. Por essa razão, devem-se realizar análises de convergência de malha, onde a malha de elementos finitos vai sendo gradualmente refinada até que se verifique convergência do valor de tensão medido dentro de uma tolerância estipulada. Ao refinamento da malha por via do aumento do número de elementos dá-se o nome de *h-method*. Caso o refinamento se faça pelo aumento do número de nós por elemento, designa-se essa técnica por *p-method*.

Natureza local dos constrangimentos de tensão

Para que se garanta que a tensão em cada membro de uma estrutura é inferior ao valor da sua tensão admissível, é necessário impor um constrangimento de tensão por cada elemento. Como consequência disso, o custo computacional associado ao cálculo de sensibilidades aumenta substancialmente, sendo tanto maior quanto mais refinada for a discretização do domínio. A utilização de técnicas de agregação é uma medida válida para fazer face a este problema. Na sua essência, consiste em reduzir o número de constrangimentos de tensão locais, agrupando-os em constrangimentos globais, regionais ou em bloco. Embora estes métodos permitam economizar custo computacional, não conseguem garantir um controlo rigoroso da tensão a

nível local, uma vez que fazem uma aproximação do valor de tensão medido localmente. Por essa razão, nesta dissertação os constrangimentos de tensão são impostos a nível local.

Como exemplos de técnicas de agregação de constrangimentos de tensão têm-se, por exemplo, variantes das funções de Kreisselmeier-Steinhauser (*KS-function*) [18, 55, 65], *p-norm* [33, 57] ou ainda *p-mean* [33].

Fenómeno da singularidade

O fenómeno da singularidade foi observado pela primeira vez nos trabalhos de Sved & Ginos em 1968 [97] e, anos mais tarde, por Kirsch [52]. No primeiro trabalho, os autores resolveram um problema de minimização da massa de uma treliça de três barras com constrangimentos de tensão e constataram que a solução óptima global do problema envolvia a remoção de uma das barras da estrutura. Essa solução estava situada numa zona degenerada do espaço de soluções admissíveis, inacessível por métodos de optimização baseados no gradiente. Este fenómeno está associado ao facto de existir um valor finito (não nulo) de tensão na “ausência” de material, o que não faz sentido do ponto de vista físico, mas é inevitável que aconteça dada a formulação contínua do problema. Na Figura 2.8 apresenta-se o espaço de projecto de um problema tipo de optimização topológica com duas variáveis de projecto, onde se pretende ilustrar a localização do óptimo global que, neste caso, é singular.

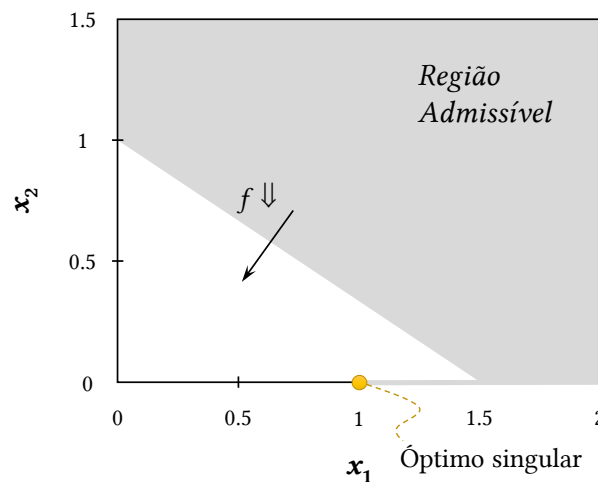


Figura 2.8: Representação do espaço de projecto de um problema tipo de optimização topológica com constrangimentos de tensão (Adaptado de [100])

Deste modo é necessário adoptar estratégias que modifiquem os constrangimentos de tensão, por forma a que a zona degenerada do domínio fique acessível aos métodos de optimização baseados no gradiente. Dentro das técnicas existentes destacam-se o ε -relaxation [17], o qp -approach [14] e o *damage approach* [101], contudo aqui apenas se dá ênfase aos dois primeiros.

2.3.3.1 ε -relaxation

Em 1997, Cheng & Guo [17] apresentaram o ε -relaxation como técnica para ultrapassar o fenómeno da singularidade. Consiste em introduzir nos constrangimentos um parâmetro ε , $0 < \varepsilon \ll 1$, que tolera uma ligeira violação dos constrangimentos de tensão caso estes permanecessem na sua forma não relaxada, ou seja, considerando um constrangimento de tensão na sua forma tipo, $g \leq 0$, a utilização do ε -relaxation modifica-o de tal forma que se passa a ter, $g \leq \varepsilon$.

Os autores resolveram problemas de minimização da massa de estruturas reticuladas, formulados de forma idêntica à equação (2.19),

$$\begin{aligned} \min_{A_e} \quad & M = \sum_{e=1}^{n^e} \rho_e A_e L_e \\ \text{s.a.} \quad & \begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l & , \quad l = 1, 2, \dots, n^{LC} \\ (\underline{\sigma}_e - \sigma_{e,l}) A_e \leq \varepsilon \\ (\sigma_{e,l} - \bar{\sigma}_e) A_e \leq \varepsilon \\ \varepsilon^2 \leq A_e & , \quad e = 1, 2, \dots, n^e \end{cases} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Em que M é a massa da estrutura, ρ_e é a massa volúmica de cada elemento e dos n^e elementos da estrutura, A_e e L_e são áreas das secções transversais e o comprimento de cada elemento e da estrutura, respectivamente, l é cada um dos n^{LC} casos de carga (*load cases*), $\underline{\sigma}_e$ e $\bar{\sigma}_e$ são as tensões admissíveis de compressão e tracção em cada elemento, respectivamente, $\sigma_{e,l}$ é a tensão no elemento e da estrutura para o caso de carga l e, por último, ε é o parâmetro de relaxamento. A imposição de um limite inferior nas variáveis de projecto não tem necessariamente de ser formulado como $\varepsilon^2 \leq A_e$. Na prática, pode ser utilizado um valor muito pequeno (1×10^{-9} , por exemplo) como limite inferior para as áreas das secções transversais.

Esta técnica permite aceder ao óptimo global de um problema deste tipo à custa de modificar o espaço de projecto, suavizando os constrangimentos, pelo que o valor óptimo obtido pela resolução de um problema relaxado do ponto de vista das tensões não é o mesmo que o do problema não relaxado, embora sejam pontos análogos. Tipicamente, o óptimo do problema

relaxado é mais optimista que o óptimo singular, *i.e.* o valor da função objectivo é mais baixo. À medida que $\varepsilon \rightarrow 0$ o problema relaxado tende para o problema original, o que justifica a resolução de vários problemas para valores decrescentes de ε , por forma a ter uma ideia mais clara do valor das variáveis de projecto e da função objectivo associados ao problema não relaxado.

Desde a publicação do trabalho de Cheng & Guo [17], o ε -relaxation tem sido adaptado e aplicado na resolução de diversos problemas. Faz-se destaque a Duysinx & Bendsøe [31], onde os autores lidaram com a minimização da massa de estruturas contínuas com constrangimentos de tensão, no contexto de uma lei SIMP e tendo à disposição um modelo de material compósito poroso (*rank-2*). No âmbito do ε -relaxation, começaram por apresentar os constrangimentos de tensão formulados da seguinte forma,

$$x \left(\frac{\sigma_{VM}}{x^p \bar{\sigma}} - 1 \right) \leq \varepsilon \quad , \quad \varepsilon^2 \leq x \quad (2.21)$$

Em que x é a variável de densidade artificial, p é o expoente de penalização do modelo SIMP e σ_{VM} é a tensão de von-Mises. Foi ainda proposta uma formulação alternativa que garante a imposição do constrangimento não relaxado quando $x = 1$, *i.e.* quando não existe remoção de material.

$$x \left(\frac{\sigma_{VM}}{x^p \bar{\sigma}} - 1 \right) \leq \varepsilon (1 - x) \quad , \quad \varepsilon^2 \leq x \quad (2.22)$$

Faz-se também referência, por exemplo, aos trabalhos de París et al. [71] e Pereira et al. [72], onde ambos resolveram problemas de minimização do volume de estruturas com constrangimentos de tensão locais. Os trabalhos de Duysinx & Sigmund [33] e Guilherme & Fonseca [40] são exemplos de problemas de minimização do volume de estruturas com constrangimentos de tensão impostos a nível global.

Sem descurar as potencialidades do ε -relaxation e a sua capacidade de ultrapassar o fenómeno da singularidade, é digno de nota que, tal como demonstrado por Stolpe & Svanberg [94], este método pode-se revelar pouco eficaz na presença de muitos mínimos locais.

2.3.3.2 *qp-approach*

Como alternativa ao ε -relaxation, Bruggi & Venini propuseram em 2008 [16] o *qp-approach* para ultrapassar o problema da singularidade. Este método é uma sequência do trabalho de Duijsinx & Bendsøe [31], na medida em que se baseia num modelo de um material compósito laminado poroso (*rank-2*), onde é necessário levar em conta os conceitos de tensão macro e microscópica. Neste tipo de modelo, os valores intermédios de densidade são encarados como a espessura das camadas da microestrutura do material, sendo que a tensão verificada nessas camadas é a tensão microscópica. Desta forma, a aplicação do *qp-approach* está restringida a problemas onde se considere uma lei de potência governada por variáveis de densidade artificial (neste caso o modelo SIMP).

Para que seja estabelecido um critério de tensão para um modelo de material deste tipo em toda a gama de valores de densidade, é necessário encontrar uma relação entre o valor das tensões e a tensão admissível, em função da variável artificial de densidade. A tensão microscópica deve obedecer a duas condições: (1) ser inversamente proporcional à variável densidade e (2) convergir para um valor de tensão finito quando a densidade tende para zero, como consequência do comportamento assintótico da tensão nas camadas. Mais concretamente, considerando que é imposta uma extensão finita ao nível macroscópico, a tensão microscópica deverá manter-se finita quando a densidade tende para zero.

Utilizando a notação $\langle \cdot \rangle$ para quantidades homogeneizadas, de modo a satisfazer a condição (1) a tensão microscópica σ_e é dada por,

$$\sigma_e = \frac{\langle \sigma_e \rangle}{x_e^q} = x_e^{p-q} \mathbf{E}_e \langle \epsilon_e \rangle \quad (2.23)$$

Em que, $\langle \sigma_e \rangle$ é a tensão macroscópica, \mathbf{E}_e é o tensor de rigidez calculado com bases nas propriedades homogeneizadas, $\langle \epsilon_e \rangle$ é o vector da extensão macroscópica e q é um expoente, cujo valor deverá ser tal que a condição (2) seja satisfeita, o que apenas se verifica para $q = p$. Assim, reescrevendo a equação (2.23),

$$\sigma_e = \mathbf{E}_e \langle \epsilon_e \rangle \quad (2.24)$$

Quando a tensão microscópica é dada pela equação (2.24) surge um problema do ponto de vista físico, pois para um valor de densidade nulo a tensão microscópica é não nula, ou seja, existe um estado de tensão na ausência de material: $\lim_{x_e \rightarrow 0} \boldsymbol{\sigma}_e \neq 0$. Deste modo, a solução ótima global do problema é singular e fica inacessível aos métodos baseados no gradiente, pelo que com $q = p$ está-se perante o problema não relaxado do ponto de vista das tensões.

Mas veja-se que qualquer que seja $q < p$,

$$\lim_{x_e \rightarrow 0} \boldsymbol{\sigma}_e = \lim_{x_e \rightarrow 0} x_e^{p-q} \mathbf{E}_e \langle \boldsymbol{\epsilon}_e \rangle = 0 \quad (2.25)$$

Introduzindo um critério de falha (e.g. von-Mises) ou, no caso desta dissertação, considerando simplesmente a tensão normal lida em cada elemento de barra, pode-se escrever uma versão relaxada do constrangimento de tensão da equação (2.19),

$$g = \left(\frac{\sigma_e}{x_e^q \bar{\sigma}_e} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad , \quad q < p \quad (2.26)$$

Tal como no ε -relaxation, o relaxamento provocado pelo qp -approach leva a que o óptimo global do problema relaxado não coincida com óptimo global do problema original. Neste caso, o efeito do relaxamento faz-se notar ao longo de toda a fronteira do constrangimento, uma vez que este é modificado por uma operação que envolve as variáveis de projecto, x_e^q , enquanto que no ε -relaxation, os constrangimentos são modificados pela adição de um parâmetro constante ε .

O problema relaxado converge para o problema original à medida que $q \rightarrow p$, i.e. $(p - q) \rightarrow 0$. Muitas vezes, adopta-se uma estratégia em que são resolvidos vários problemas para vários valores de q . O valor de q vai-se aproximando gradualmente do valor de p (que está fixo) e utiliza-se a solução do problema anterior como ponto de partida do problema seguinte. Contudo, uma prática igualmente válida em problemas de optimização topológica, consiste em considerar simplesmente $p - q = 0.5$, ou um outro valor que se revele adequado ao problema.

Outras variantes do qp -approach foram propostas por Le et al. [57] e Lee et al. [59]. Em ambos os trabalhos os autores utilizaram técnicas de agregação para combater a natureza local dos constrangimentos de tensão, sob pena de perderem um controlo rigoroso do valor da tensão a nível local. Bruggi & Duysinx [15] aplicaram o qp -approach na resolução de problemas de

minimização do peso de estruturas contínuas com constrangimentos de tensão e *compliance*, separadamente e em simultâneo.

Muito recentemente, em 2018, Coelho et al. [23] e Collet et al. [24] utilizaram o *qp-approach* como estratégia para ultrapassar a singularidade. Estas publicações são particularmente relevantes pelo facto de serem pioneiras na consideração de constrangimentos de tensão no projecto de materiais celulares de microestrutura periódica.

No ponto que se segue, pretende-se exemplificar com uma estrutura reticulada de três barras [52] o efeito que as técnicas de relaxamento anteriormente apresentadas produzem em termos de modificação dos constrangimentos de tensão e domínio admissível.

2.3.3.3 Exemplo de aplicação

Considere-se a treliça de três barras com três apoios fixos sujeita a uma carga pontual da Figura 2.9, discretizada em três elementos finitos. Esta estrutura foi utilizada por Kirsch [52] para evidenciar a existência do fenómeno da singularidade em problemas com constrangimentos de tensão, numa altura em que ainda não estavam disponíveis quaisquer técnicas de relaxamento. Pretende-se demonstrar a existência deste fenómeno e comprovar o efeito que as técnicas de relaxamento anteriormente apresentadas provocam no espaço de projecto.

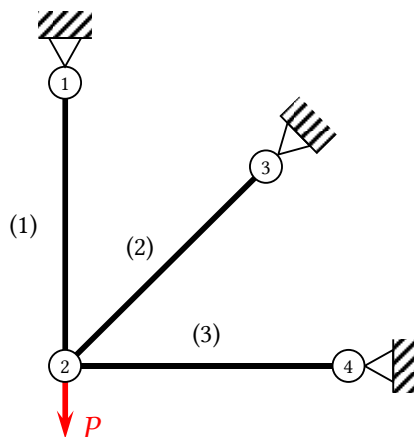


Figura 2.9: Treliça de 3 barras de Kirsch [52].

Para isso, assumiu-se a existência de uma fase de material sólido e uma de vazio e foram resolvidos dois problemas de minimização da massa da estrutura com constrangimentos de tensão: (1) áreas como variáveis de projecto e ε -relaxation como técnica de relaxamento e (2)

densidades artificiais como variáveis de projecto e *qp-approach* como técnica de relaxamento. Os dados dos problemas foram retirados da dissertação de Palma [70] e encontram-se resumidos na Tabela 2.1. Nesse trabalho, os problemas foram resolvidos unicamente de forma gráfica, o que envolveu a dedução das expressões de cada constrangimento de tensão em função das variáveis de projecto. Aqui, as representações gráficas apresentadas correspondem às expressões deduzidas por Palma [70], análogas à equação (2.19), contudo os problemas foram resolvidos com outra formulação e com recurso à função *fmincon* da *toolbox* de optimização do MATLAB em conjunto com um programa de elementos finitos desenvolvido também em linguagem MATLAB. O algoritmo de optimização utilizado foi o SQP (secção 3.2.1). Faz-se notar que as representações gráficas dos problemas apenas são possíveis porque existem variáveis de projecto acopladas, ficando-se apenas com duas variáveis por problema. A solução óptima global deste problema passa por remover a barra 1, obtendo-se com uma estrutura reticulada de apenas duas barras.

Tabela 2.1: Dados dos problemas resolvidos para demonstrar o fenómeno da singularidade.

	ÁREAS	DENSIDADES
Comprimento das barras, L_e	$L_1 = L_2 = L_3 = 1$	$L_1 = L_2 = L_3 = 1$
Módulo de Young, E_e	$E_1 = E_2 = E_3 = 1$	$E_1 = E_2 = E_3 = 1$
Áreas das secções transversais, A_e	$A_1 \geq 0$ $A_2 = A_3 \geq 0$	$A_1 = 7.8$ $A_2 = A_3 = 1.6$
Variáveis de densidade artificial, x_e	—	$x_1 \geq 0$ $x_2 = x_3 \geq 0$
Massas volúmicas, ρ_e	$\rho_1 = 4$ $\rho_2 = \rho_3 = 0.5$	$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$
Variáveis acopladas	$A_2 = A_3$	$x_2 = x_3$
Tensões admissíveis, $\bar{\sigma}_e$	$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = 20$	$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = 20$
Carga pontual, P	10	10
Método de relaxamento	ε -relaxation	<i>qp-approach</i> c/ SIMP ($p = 3$)

Para evitar os problemas associados à utilização da função módulo, os problemas não relaxados de minimização da massa com constrangimentos de tensão são formulados de forma análoga à equação (2.19),

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{A}} \quad & \sum_{e=1}^3 \rho_e A_e L_e = 4A_1 + A_2 & \min_{\mathbf{x}} \quad & \sum_{e=1}^3 x_e \rho_e A_e L_e = 7.8x_1 + 3.2x_2 \\
\text{s.a.} \quad & \begin{cases} g_e = A_e \left(\frac{(\sigma_e(\mathbf{A}))^2}{\bar{\sigma}_e^2} - 1 \right) - \varepsilon \leq 0 \\ A_e \geq 0, \quad e = 1, 2, 3 \end{cases} & \text{s.a.} \quad & \begin{cases} g_e = \left(\frac{\sigma_e(\mathbf{x})}{x_e^q \bar{\sigma}_e} \right)^2 - 1 \leq 0 \\ 0 \leq x_e \leq 1, \quad e = 1, 2, 3 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Sendo esta a formulação dos problemas não relaxados considera-se $\varepsilon = 0$ no problema de áreas e $q = p = 3$ no problema de densidades.

Na formulação da equação (2.27), chama-se a atenção relativamente ao facto de no problema de áreas cada constrangimento ser multiplicado pela área do respectivo elemento. Este aspecto está relacionado com a natureza dos constrangimentos de tensão, que se dizem dependentes do projecto [78], na medida em que não existe forma de remover elementos estruturais sem que o respectivo constrangimento seja violado pois, como já foi referido, na ausência de material existe um estado de tensão. Achtziger & Kansow [1] referem-se a estes problemas como *Mathematical Programs with Vanishing Constraints* (MPVC). Uma estratégia para ultrapassar este problema foi proposta por Cheng & Diang [18] e consiste em multiplicar o constrangimento original pela variável de projecto que funciona assim como variável topológica no elemento em questão. Por outras palavras, no problema de áreas os constrangimentos deverão ser multiplicados pela respectiva variável de área e no problema de densidades os constrangimentos deverão ser multiplicados pela respectiva variável de densidade artificial. Como se está a utilizar o *qp-approach* essa variável de densidade surge elevada ao expoente $(p - q)$, valor positivo não nulo, sendo que p está implícito na tensão. Desta forma, assegura-se que soluções que contenham variáveis de projecto no seu limite inferior são admissíveis.

Na Figura 2.10 é possível visualizar graficamente o problema de áreas não relaxado do ponto de vista das tensões e a localização do óptimo global na zona degenerada do domínio admissível. Posto isto, para que seja possível de alcançar o óptimo global com um algoritmo de optimização baseado no gradiente, ε deverá tomar valores não nulos, neste caso $\varepsilon = \{0.05, 0.005\}$. Há que ter também em consideração que as variáveis de projecto deverão apresentar agora um limite inferior positivo não nulo (10^{-5}), para se evitar singularidades na matriz de rigidez do sistema. Na Figura 2.11 constam as representações gráficas do problema para dois valores de ε , bem como a localização do óptimo global para cada um deles.

Na Tabela 2.2 encontram-se resumidos os resultados obtidos no problema de optimização de áreas.

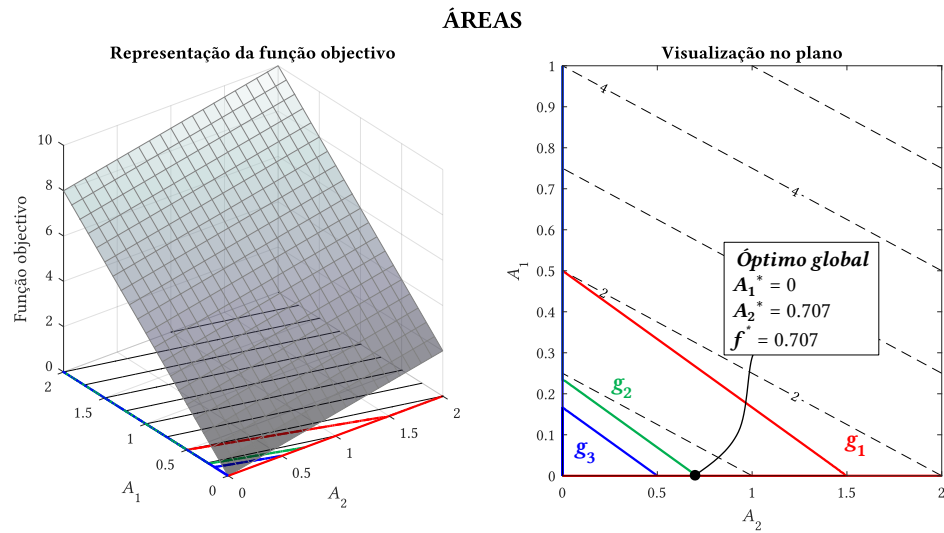


Figura 2.10: Representação gráfica do problema de áreas não relaxado do ponto de vista das tensões.

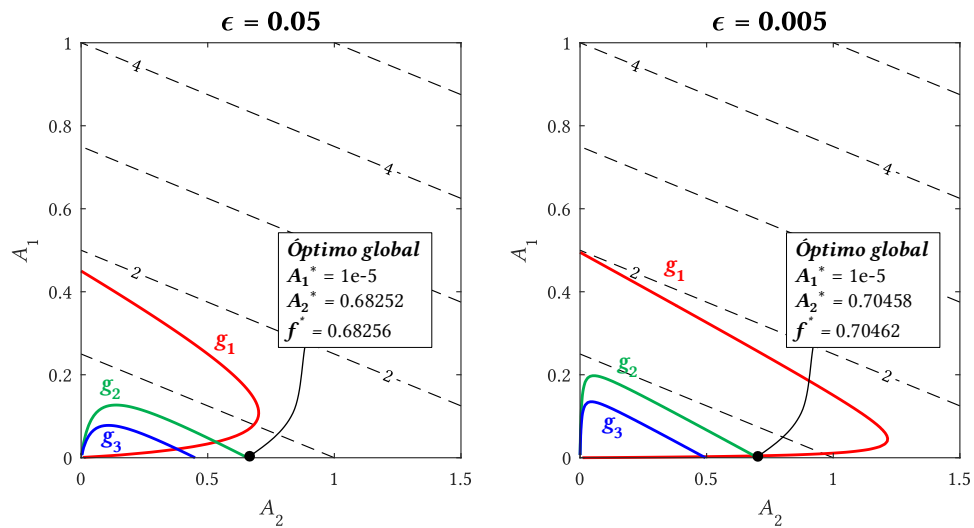


Figura 2.11: Representação gráfica dos resultados obtidos no problema de optimização de áreas. $\epsilon = \{0.05, 0.005\}$

Tabela 2.2: Resultados obtidos no problema de optimização de áreas da treliça de três barras após relaxamento dos constrangimentos de tensão.

	Problema original ($\epsilon = 0$)	$\epsilon = 0.05$	$\epsilon = 0.005$
A_1^*	0	1e-5	1e-5
A_2^*	0.707	0.68252	0.70458
f^*	0.707	0.68256	0.70462
$\Delta_{\%}(f^*)$	N/A	-3.457 %	-0.337 %

Para relaxar o problema de densidades do ponto de vista das tensões basta apenas considerar que o expoente q toma valores inferiores a p , neste caso $q = \{2.50, 2.95\}$.

Na Figura 2.12 é possível visualizar a representação gráfica do problema não relaxado e na Figura 2.13 apresentam-se os resultados obtidos após relaxar o problema. Na Tabela 2.3 apresenta-se um resumo dos resultados obtidos.

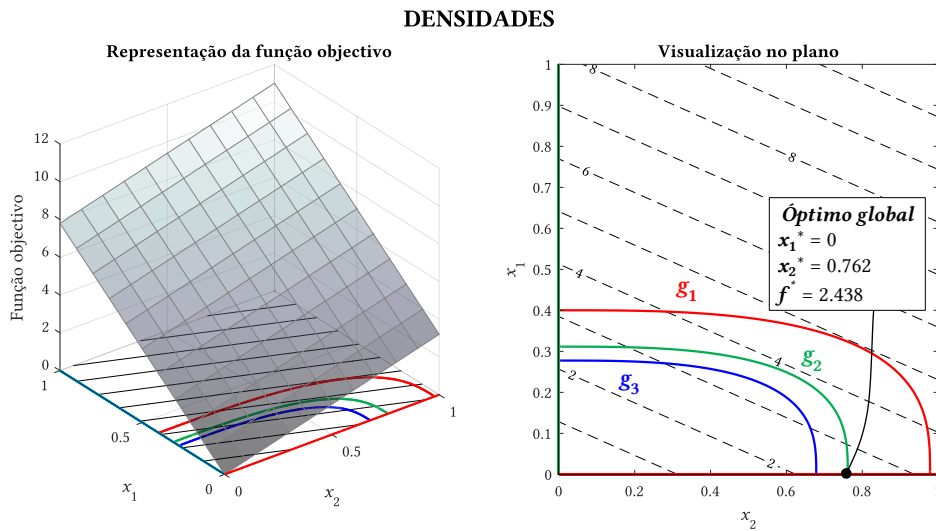


Figura 2.12: Representação gráfica do problema de densidades não relaxado do ponto de vista das tensões.

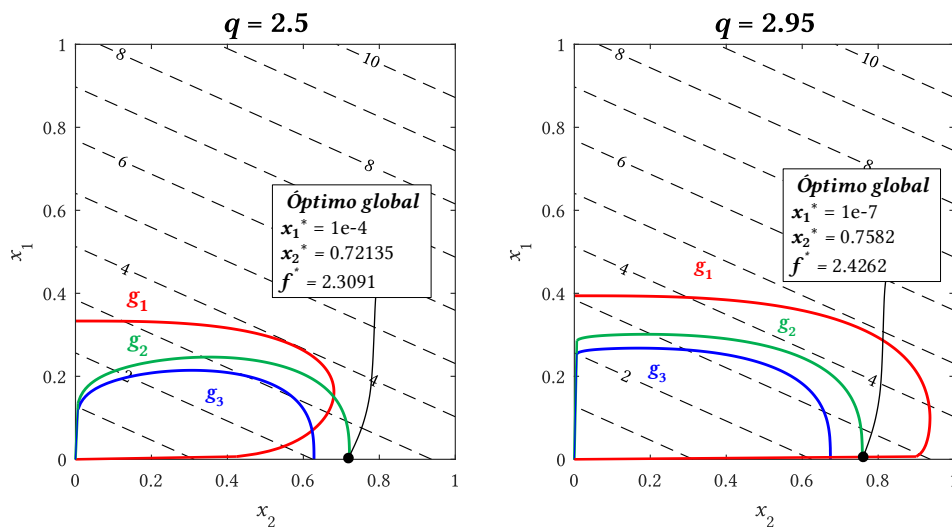


Figura 2.13: Representação gráfica dos resultados obtidos no problema de otimização de densidades. $q = \{2.5, 2.95\}$

Tabela 2.3: Resultados obtidos no problema de optimização de densidades da treliça de três barras após relaxamento dos constrangimentos de tensão.

	Problema original ($q = p = 3$)	$q = 2.50$	$q = 2.95$
x_1^*	0	1e-4	1e-7
x_2^*	0.762	0.72135	0.75820
f^*	2.438	2.3091	2.4262
$\Delta_{\%}(f^*)$	N/A	-5.287 %	-0.484 %

Com as representações gráficas é possível perceber que a escolha do ponto de partida \mathbf{x}' tem influência no ponto óptimo determinado pelo algoritmo de optimização. Atente-se por exemplo, na representação de $q = 2.95$ na Figura 2.13. Caso se parta do ponto $[0.5 \ 0.5]$, que coloca o valor inicial das variáveis de projecto em pé de igualdade, o algoritmo converge para um mínimo local junto ao ponto $[0.4 \ 0]$ com $f^* \approx 3$. Assim, para alcançar o óptimo global é necessário partir de um ponto que desfavoreça a barra 1 e favoreça a variável de projecto das barras 2 e 3, e.g. $[1 \ 0.4]$.

Como se pode observar, os problemas relaxados de áreas e densidades tendem para o problema não relaxado à medida que $\varepsilon \rightarrow 0$ e $q \rightarrow p$, respectivamente. Todos os resultados obtidos nos problemas relaxados apresentam um melhor valor da função objectivo comparativamente ao problema não relaxado, sendo esse valor tanto melhor quanto maior for o relaxamento. É natural que tal aconteça uma vez que as técnicas de relaxamento toleram soluções que violariam ligeiramente os constrangimentos originais não relaxados, por isso é possível obter estruturas mais leves que respeitam os constrangimentos de tensão. Contudo, este aspecto faz com que seja recomendável a resolução de vários problemas em que o relaxamento vai sendo gradualmente reduzido, para que se fique com uma ideia mais clara do verdadeiro valor das variáveis de projecto. Embora o erro relativo máximo se verifique no *qp-approach*, não se pode tirar qualquer conclusão relativamente à sua performance face ao *ε -relaxation*, uma vez que os parâmetros escolhidos não são equivalentes.

Um outro aspecto digno de nota tem a ver com o limite inferior das variáveis de projecto, pois pode haver o caso em que um desses limites, por ser demasiado elevado, esteja a impedir o algoritmo de remover um elemento estrutural, mas sempre tendo em conta que um limite inferior demasiado baixo é susceptível de criar instabilidades numéricas, pelo que é necessário haver um *trade-off* e ter em consideração o expoente de penalização que se está a utilizar (no caso do problema de densidades).

Reconhecendo o carácter demonstrativo deste exemplo, conclui-se que ambas as técnicas de relaxamento permitem ultrapassar o fenómeno da singularidade com sucesso. Os erros relativos máximos do valor da função objectivo dos problemas mais relaxados relativamente ao problema original foram -3.457% e -5.287% no ε -relaxation e qp -approach, respectivamente.

Nesta dissertação, uma vez que se resolveram problemas de optimização topológica com base na variável densidade e tendo em conta o argumento de Stolpe e Svanberg [94] no que toca à capacidade do ε -relaxation para lidar com problemas com muitos mínimos locais, optou-se pelo qp -approach.

Antes de se prosseguir para o próximo ponto, atente-se no valor das variáveis de projecto no ponto óptimo. Embora no problema de densidades exista uma penalização implícita de densidades intermédias, em problemas de minimização da massa essa penalização perde um pouco da sua eficácia, uma vez que as densidades intermédias permitem obter soluções mais económicas que respeitam os constrangimentos de tensão, embora com pouco significado físico caso se tenha um conjunto de materiais discretos à disposição. Este aspecto não foi descurado no decorrer desta dissertação, sendo abordado mais adiante.

2.3.4 Consideração de múltiplas fases de material

Até aqui, abordou-se o tema da optimização topológica assumindo apenas duas fases de material disponíveis, maioritariamente considerando uma fase sólida e uma fase de vazio. Nestes problemas, determina-se a distribuição de material óptima dentro de um domínio de projecto, com o objectivo de minimizar uma função que representa uma determinada medida de desempenho de uma estrutura (massa, *compliance*, frequência natural, etc.), respeitando constrangimentos (e.g. deslocamento, tensão, *compliance*, volume, etc.). Uma evolução natural deste tipo de problemas envolve a consideração de um número de fases de material superior a dois. Assumindo a selecção de uma fase de material discreta para cada ponto do domínio, os problemas de optimização topológica podem ser classificados em três categorias, consoante as fases de material envolvidas. Designando o número total de fases de material disponíveis (sólido ou vazio) por n^f e o número de fases de material sólido por n^m tem-se:

Tabela 2.4: Classificação dos problemas de optimização topológica consoante o tipo de fases de material.

Tipo de problema	n^m	n^f	n^m em função de n^f
SMTO (<i>Single Material Topology Optimization</i>)	$n^m = 1$	$n^f = 2$	N/A
MMS (<i>Multi Material Selection</i>)	$n^m \geq 2$	$n^f \geq 2$	$n^m = n^f$
MMTO (<i>Multi Material Topology Optimization</i>)	$n^m \geq 2$	$n^f \geq 3$	$n^m = n^f - 1$

Em todas estas categorias, pretende-se determinar dentro do domínio de projecto o subdomínio correspondente a cada uma das fases de material (vazio ou sólido) disponíveis. Para uma dada estrutura, existe sempre a garantia de que o valor da função objectivo associado ao óptimo global será tanto melhor quanto maior for o número de fases de material disponíveis, pelo facto de existir uma maior liberdade de projecto. Porém, só é possível garantir que tal aconteça desde que as fases utilizadas nos problemas de menor escolha constem nos problemas de maior escolha.

Para clarificar o leitor, por lei de interpolação de material entende-se uma expressão matemática que, com recurso a variáveis de densidade artificial, calcula uma propriedade resultante com base nas propriedades de diferentes materiais reais que são parte constituinte dessa expressão. Essa propriedade resultante é obtida consoante o valor das variáveis de densidade artificial. Por exemplo, as equações (2.11) e (2.12) são consideradas leis de interpolação de material (baseadas no modelo SIMP e RAMP, respectivamente) pois consoante o valor das variáveis x_e , obtém-se uma propriedade resultante que se situa entre as propriedades do material 1 e 2. Idealmente, caso as variáveis de densidade tomem os seus valores limite, a propriedade resultante irá corresponder à propriedade do material 1 ou do material 2. Veja-se que nessas leis basta uma variável de projecto para fazer a interpolação entre duas fases de material. Tipicamente, dependendo da lei de interpolação, o número de variáveis de projecto necessário por cada elemento finito aumenta com o aumento do número de fases de material. A propriedade resultante passa agora a ser dada em função do valor de cada uma das funções de peso associada a cada fase de material, sendo que cada uma das funções de peso depende das variáveis de densidade artificial no elemento finito em questão. Nas extensões do modelo SIMP ou RAMP (na sua forma clássica) as funções de peso associadas a cada uma das fases de material não são idênticas, dada a construção recursiva deste tipo de leis.

2.3.4.1 Extensões do modelo SIMP clássico

Os primeiros desenvolvimentos nesta área foram feitos com recurso a optimização topológica baseada na variável densidade, nomeadamente com extensões ao modelo SIMP. Em 1997, Sigmund & Torquato [86] optimizaram a microestrutura de materiais compósitos com coeficientes de dilatação térmica pouco convencionais recorrendo a duas fases de material sólido e uma de vazio. Um trabalho semelhante foi também desenvolvido por Gibiansky & Sigmund [36], desta feita considerando materiais com módulo volumétrico extremo. Em 1999, Bendsøe & Sigmund [12] levaram a cabo um estudo analítico das fronteiras das propriedades efectivas de materiais compósitos, tendo testado diversas leis de interpolação de material associadas a um diferente número de fases.

Para $n^f = 2$, considere-se a lei de interpolação da equação (2.28), aplicável a 2 fases de material sólido ($E^{(2)} \neq 0$) ou 1 fase de material sólido e 1 fase de vazio ($E^{(2)} = 0$). Veja-se que esta expressão é idêntica à equação (2.11).

$$E_e = \underbrace{(x_{e,1}^p)}_{w_1} E^{(1)} + \underbrace{(1 - x_{e,1}^p)}_{w_2} E^{(2)} \quad (2.28)$$

Para $n^f = 3$ tem-se a expressão da equação (2.29).

$$\begin{aligned} E_e &= x_{e,1}^p \left(x_{e,2}^p E^{(1)} + (1 - x_{e,2}^p) E^{(2)} \right) + (1 - x_{e,1}^p) E^{(3)} \\ &= \underbrace{x_{e,1}^p x_{e,2}^p}_{w_{e,1}} E^{(1)} + \underbrace{x_{e,1}^p (1 - x_{e,2}^p)}_{w_{e,2}} E^{(2)} + \underbrace{(1 - x_{e,1}^p)}_{w_{e,3}} E^{(3)} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Note-se que o número total de variáveis de projecto é $n^e (n^f - 1)$, independentemente de se considerar um problema MMS ou MMTO. Dada a forma como esta lei é construída, nesta dissertação adoptou-se a nomenclatura de lei SIMP recursiva (ou simplesmente SIMP recursivo). Esta nomenclatura advém do facto de qualquer variante desta lei para $n^f = M$ estar sempre contida na variante para $n^f = M + 1$ (admitindo que ao índice m das variáveis da lei para $n^f = M$ é somado 1):

$$E_e|_{n^f = M+1} = x_{e,1}^p \left(E_e|_{n^f = M} \right) + (1 - x_{e,1}^p) E^{(M+1)} \quad (2.30)$$

Na Figura 2.14 é possível visualizar representações gráficas da superfície de interpolação resultante da equação (2.29) para três valores do expoente de penalização do modelo SIMP.

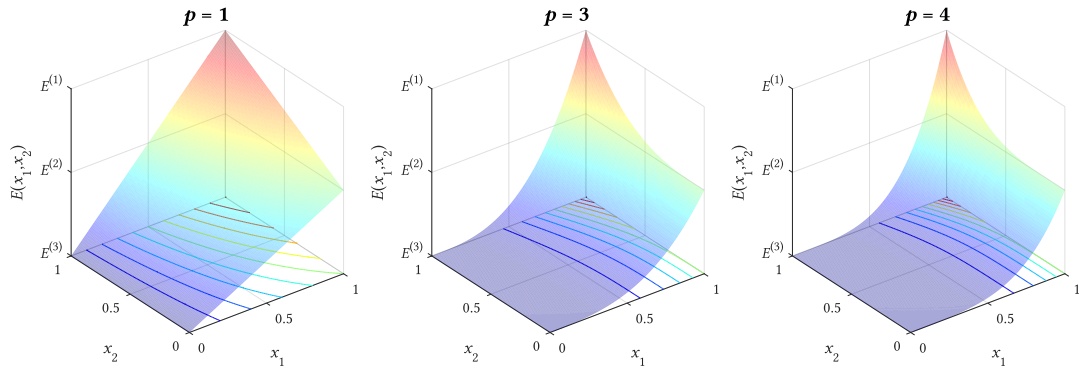


Figura 2.14: Representação gráfica da lei SIMP regressiva de 3 fases de material para três valores de expoente de penalização.

Com $n^f = 3$ as diferenças entre cada uma das funções de peso começam a ser mais visíveis, pois veja-se que para além de todas elas serem diferentes entre si, nem todas são influenciadas pelas mesmas variáveis de projecto – Figura 2.15.

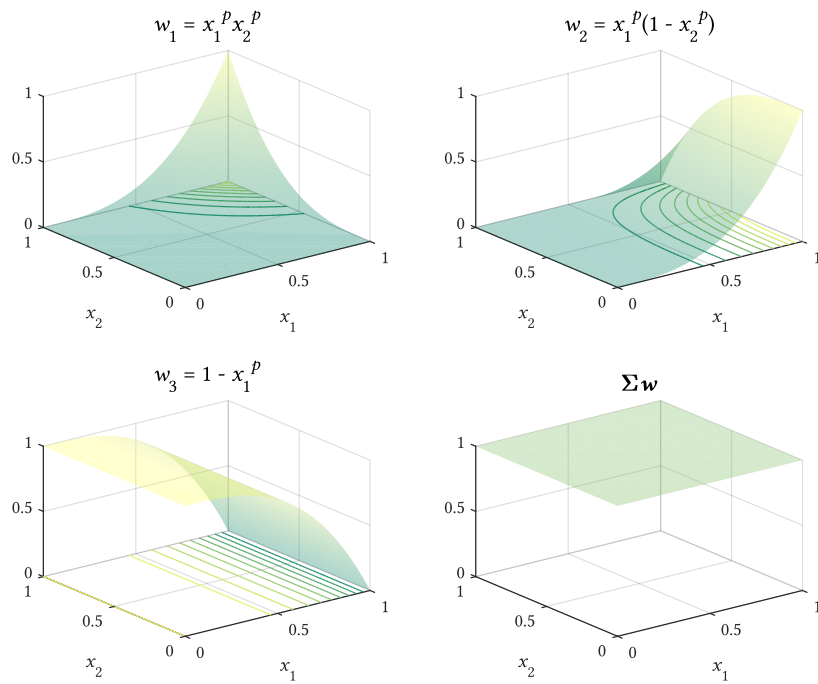


Figura 2.15: Funções de peso da lei SIMP regressiva para 3 fases de material e considerando $p = 3$.

Contudo, faz-se notar o facto de o somatório das funções de peso ser unitário independentemente do valor das variáveis de projecto, o que significa que $E^{(3)} < E_e < E^{(1)}$ e, portanto, está-se efectivamente a interpolar entre as propriedades de um conjunto de materiais disponíveis.

Assumindo $E^{(3)} = 0$, a variável $x_{e,1}$ pode ser encarada como uma variável de topologia, uma vez que determina a presença ou ausência de material, e a variável $x_{e,2}$ como uma variável de selecção de material. Na Figura 2.16 apresentam-se os valores das variáveis de projecto associados a cada uma das fases de material.

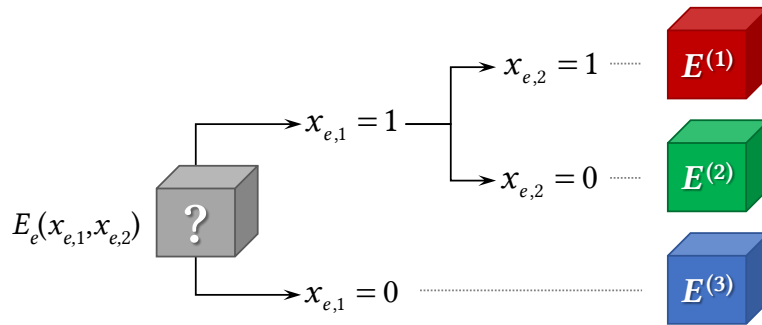


Figura 2.16: Variáveis de projecto associadas a cada uma das fases de material na lei SIMP regressiva de 3 fases.

Generalizando para um número arbitrário de fases,

$$E_e = \sum_{m=1}^{n^f} \left[\underbrace{\left(1 - \xi_{e,m} x_{e,m}^p\right) \left(\prod_{i=1}^{m-1} x_{e,i}^p\right)}_{w_{e,(n^f-m+1)}} E^{(n^f-m+1)} \right], \quad \xi_{e,m} = \begin{cases} 1 & , \quad m \neq n^f \\ 0 & , \quad m = n^f \end{cases}, \quad \begin{cases} p \geq 1 \\ 0 < x_{e,m} \leq 1 \end{cases} \quad (2.31)$$

Com esta formulação fica evidente o aumento da complexidade da lei de interpolação com o aumento do número de fases de material, o que traz algumas consequências negativas. Em primeiro lugar, o facto de não haver uniformidade entre as funções de peso associadas às várias fases de material faz com que uma implementação computacional desta lei de uma forma generalizada seja particularmente desafiante, assim como o cálculo de sensibilidades por métodos analíticos. Para além disso, existe a possibilidade de ocorrerem instabilidades numéricas quando as variáveis de projecto se aproximam do seu valor inferior. Mais concretamente, admitindo $\underline{x} = 1 \times 10^{-4}$, com $p = 3$ tem-se $\underline{x}^p = 1 \times 10^{-12}$. Acrescentando o facto das funções de peso de cada fase de material resultarem de vários produtos entre as variáveis de projecto, facilmente se

atingem valores pouco recomendáveis do ponto de vista numérico. Apesar das suas desvantagens, esta lei tem sido amplamente utilizada na resolução de problemas muito variados.

Em Kato et al. (2009) [50] foram resolvidos problemas de maximização da ductilidade de betão reforçado com fibras (*fiber reinforced concrete*, FRC) com constrangimentos de volume, tendo-se considerado um máximo de 3 fases de material. Para maximizar a ductilidade de FRC's à escala macroscópica foi necessário intervir ao nível da organização estrutural numa escala menor. Inicialmente os autores consideraram apenas duas fases, betão e fibras de vidro AR (*alkali resistant*), o que permitiu aumentar consideravelmente a ductilidade da estrutura. No entanto, com a adição de uma terceira fase, fibras de carbono, conseguiu-se ainda um aumento de 50% face ao *design* com duas fases de material. A atribuição de ductilidade a um material como o betão, caracterizado por uma ruptura frágil, tem grande relevância, na medida em que se torna possível prever antecipadamente a sua falha.

No trabalho de Long et al. (2017) [61] resolveram-se problemas de minimização da massa de estruturas com constrangimentos de frequências naturais ou de deslocamento. Os autores deram particular ênfase à existência de mínimos locais, reconhecendo a sua inevitabilidade em problemas de MMTO. Para tentar contornar este aspecto, as variáveis de projecto consideradas são uma função explícita das variáveis de densidade artificial do modelo SIMP e o problema é resolvido utilizando um algoritmo SQP. Um outro ponto positivo deste trabalho tem a ver com a implementação computacional da lei de interpolação. Ao invés de se interpolarem módulos de Young ou tensores de rigidez, interpolam-se as matrizes de rigidez locais de cada uma das fases de material.

Recentemente, Li & Kim (2018) [60] compararam dois tipos de problemas de MMTO: minimização da *compliance* com constrangimentos nas fracções volúmicas de cada uma das fases e minimização da massa com constrangimentos de deslocamento. A lei de interpolação é apresentada de uma forma generalizada para um número arbitrário de fases, assim como o cálculo de sensibilidades. A metodologia é testada com três exemplos numéricos e considera-se um máximo de 4 fases de material. Quando se comparam os resultados dos dois tipos de problemas para o mesmo valor de energia de deformação, o problema de minimização da massa apresenta sempre estruturas mais leves, o que faz com que esta formulação seja preferível. À medida que o número de fases de material aumenta, a massa das estruturas vai sendo cada vez menor, como seria de esperar. Embora se reconheçam virtudes neste trabalho há um aspecto que deve ser tido em consideração. Apesar deste modelo penalizar implicitamente as variáveis de densidade artificial para os seus valores limite, os problemas de minimização da massa caracterizam-se por soluções óptimas com valores de densidade intermédios. Para que a solução obtida seja

interpretável do ponto de vista físico, é fundamental que em cada elemento as variáveis de projecto apresentem valores discretos, de maneira a que seja possível fazer uma correspondência rigorosa para um dos materiais disponíveis. Neste trabalho os autores fazem face a este problema utilizando uma técnica de pós-processamento, isto é, caso as variáveis de projecto num elemento estejam enquadradas dentro de um determinado intervalo de valores, faz-se a correspondência com a respectiva fase de material – equação (2.32).

$$\begin{aligned}
 E_e &= x_{e,1}^p \left(x_{e,2}^p \left(x_{e,3}^p E^{(aço)} + (1 - x_{e,3}^p) E^{(titânio)} \right) + (1 - x_{e,2}^p) E^{(alumínio)} \right) \\
 &= \underbrace{x_{e,1}^p x_{e,2}^p x_{e,3}^p}_{w_{aço}} E^{(aço)} + \underbrace{x_{e,1}^p x_{e,2}^p (1 - x_{e,3}^p)}_{w_{titânio}} E^{(titânio)} + \underbrace{x_{e,1}^p (1 - x_{e,2}^p)}_{w_{alumínio}} E^{(alumínio)}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
 \text{se } x_{e,1} \leq 0.5 &\Rightarrow \text{vazio} \\
 \text{se } x_{e,1} > 0.5 \wedge x_{e,2} \leq 0.5 &\Rightarrow \text{alumínio} \\
 \text{se } x_{e,1} > 0.5 \wedge x_{e,2} > 0.5 \wedge x_{e,3} \leq 0.5 &\Rightarrow \text{titânio} \\
 \text{se } x_{e,1} > 0.5 \wedge x_{e,2} > 0.5 \wedge x_{e,3} > 0.5 &\Rightarrow \text{aço}
 \end{aligned}$$

Tendo em conta que não foi apresentada qualquer distribuição de densidades, a qualidade desta aproximação pode ser questionada. Imagine-se que são cumpridos os requisitos para que o material seleccionado seja aço. Se todas as variáveis de projecto tiverem o valor 0.51 o valor da função de peso associado à fase de aço é $w_{aço} = 0.51^3 \approx 0.13$, ou seja, está-se a assumir a presença de aço num elemento onde está presente um material fictício cujo valor absoluto da propriedade é apenas 13% do valor da propriedade do aço, o que faz com que esta aproximação seja muito grosseira. As densidades intermédias são um problema sério, pois é preciso não esquecer que um problema de optimização topológica é um problema discreto. Nesta dissertação este aspecto recebeu particular atenção, tendo-se adoptado estratégias para que a estrutura óptima não requeira qualquer técnica de pós-processamento.

Woischwill & Kim [105] utilizaram o SIMP regressivo para resolver, problemas de MMMJTO (*Multi Material Multi Joint Topology Optimization*), pela primeira vez. Aqui, para além de se determinar o *layout* óptimo de uma estrutura a partir de um conjunto de fases de material disponíveis, não se assume uma interface perfeita entre as diferentes fases, pelo que tipo de interface óptimo é também algo que se pretende determinar. Os problemas de MMMJTO resolvidos consistiram na resolução de dois problemas menores: um primeiro problema de MMTO, onde se minimizou a *compliance* da estrutura com um constrangimento de massa³, e um segundo

³ Em problemas de MMTO é muito comum que o volume, esteja ele na função objectivo ou num constrangimento, seja substituído pela massa da estrutura, uma vez que nestes casos a massa volúmica varia consoante a fase de material sólido seleccionada.

problema de MJTO (*Multi Joint Topology Optimization*), onde se determinaram os tipos de interface que minimizam o custo monetário sujeito a constrangimentos de *compliance*. Contudo, neste trabalho os autores utilizaram uma heurística muito semelhante a Li & Kim [60] para pós-processar os resultados obtidos e assim resolver a questão das densidades intermédias.

Zhang et al. [106] optimizaram a microestrutura de metamateriais auxéticos⁴ considerando três fases de material: uma de vazio e duas de material sólido. Os problemas resolvidos consistiram em minimizar o coeficiente de Poisson com constrangimentos na fracção volúmica de cada uma das fases.

Embora (2.31) tenha sido apresentada do ponto de vista do modelo SIMP, pode ser feita uma adaptação simples caso se pretenda utilizar o modelo RAMP, bastando para isso substituir os termos $x_{e,m}^p$ por $x_{e,m} / (1 + q(1 - x_{e,m}))$.

2.3.4.2 Discrete Material Optimization (DMO)

Em 2004, no trabalho de Stegmann [89] foi apresentada uma nova metodologia para a determinação da melhor distribuição de orientação das fibras de materiais compósitos laminados. Esta metodologia baseada na variável densidade, conhecida como *Discrete Material Optimization* (DMO), é aplicável a um conjunto de problemas MMS e MMTO muito diversificado. Pretende-se, para todos os elementos de uma estrutura, escolher um único material a partir de um conjunto de materiais previamente definido, por forma a minimizar uma função objectivo.

Na sua génese, consiste em construir uma lei de interpolação de material baseada nos modelos SIMP ou RAMP em que as funções de peso de cada fase de material disponível são uniformes, *i.e.* são praticamente idênticas, diferindo apenas nas variáveis de projecto que fazem a selecção de cada uma das fases de material. À semelhança do SIMP regressivo, a propriedade resultante num dado elemento finito, E_e , é dada pela soma ponderada das propriedades das diferentes fases de material sólido disponíveis. Esta ponderação é feita por cada uma das funções de peso, $w_{e,m}$, que dependem das variáveis de densidade artificial desse elemento – equação (2.33).

$$E_e = \sum_{m=1}^{n^m} w_{e,m} E^{(m)} = w_{e,1} E^{(1)} + w_{e,2} E^{(2)} + \dots + w_{e,n^m} E^{(n^m)} \quad , \quad 0 < w_{e,m} \leq 1 \quad (2.33)$$

⁴ Os materiais auxéticos caracterizam-se por apresentarem coeficiente de Poisson negativo, ou seja, quando traccionados numa direcção longitudinal, apresentam expansão nas direcções transversais. Da mesma forma, quando sujeitos a compressão numa direcção longitudinal, apresentam extensão negativa nas direcções transversais.

Só em 2011, no trabalho de Gao & Zhang [35], se fez a distinção entre leis de interpolação regressivas (*Recursive Multiphase Materials Interpolation*, RMMI), onde se enquadram as extensões do SIMP e RAMP clássico (única opção explorada até ao surgimento do DMO), e leis de interpolação uniformes (*Uniform Multiphase Materials Interpolation*, UMMI), onde se enquadram as variantes do DMO. Os autores resolveram problemas MMTO de minimização da *compliance* com constrangimentos de massa e compararam leis de interpolação dos dois tipos, tendo apontado vantagens às leis uniformes comparativamente ao SIMP regressivo, na medida em que este último, por ter uma formulação demasiado complexa, acaba por fazer com que os constrangimentos de massa sejam não lineares e, portanto, mais susceptíveis de criar dificuldades numéricas.

Foram apresentadas várias leis DMO [64, 89, 90], que diferem apenas nas funções de peso utilizadas, contudo aqui apenas se vão mencionar os DMO 1, 4 e 5. Comparativamente às extensões do SIMP ou RAMP clássico, a principal vantagem deste tipo de formulações prende-se com o facto de poderem ser generalizadas para um número arbitrário de fases de material sem aumentar significativamente a complexidade da lei de interpolação.

DMO 1

Nesta lei de interpolação as funções de peso têm a formulação mais simples possível dentro de um modelo SIMP ou RAMP. Considerando um modelo SIMP, o DMO 1 pode ser generalizado para n^f fases de material (em que uma delas é de vazio) tal como se apresenta na equação (2.34).

$$E_e = \sum_{m=1}^{n^m} \underbrace{(x_{e,m})^p}_{w_{e,m}} E^{(m)} = x_{e,1}^p E^{(1)} + x_{e,2}^p E^{(2)} + \dots + x_{e,n^m}^p E^{(n^m)} \quad , \quad 0 < x_{e,m} \leq 1 \quad (2.34)$$

Veja-se que com esta formulação cada função de peso é apenas influenciada por uma variável de projecto, o que é positivo do ponto de vista de uma implementação computacional e do cálculo de sensibilidades. Comparativamente ao SIMP regressivo, que requer apenas $(n^f - 1)$ variáveis de projecto por elemento para interpolar as propriedades de n^f fases de material (sejam de material sólido ou vazio), no DMO 1 são necessárias n^m variáveis de projecto por elemento independentemente do problema ser MMS ou MMTO, ou seja, o número de variáveis de projecto por elemento é igual ao número de fases de material sólido disponíveis.

Na Figura 2.17 é possível visualizar a superfície de interpolação desta lei para três fases de material (duas de material sólido e uma de vazio) – equação (2.35).

$$E_e = x_{e,1}^p E^{(1)} + x_{e,2}^p E^{(2)} \quad , \quad \begin{cases} p \geq 1 \\ 0 < x_{e,m} \leq 1 \end{cases} \quad (2.35)$$

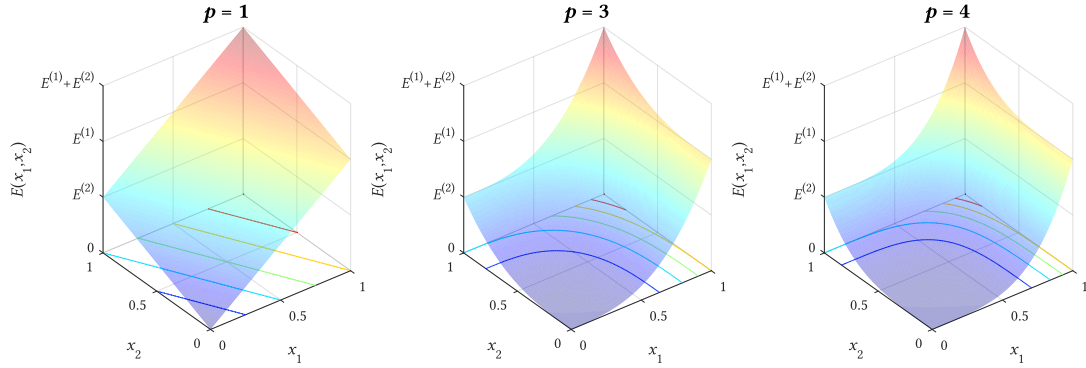


Figura 2.17: Representação gráfica da lei DMO 1 considerando 2 fases de material sólido e 1 de vazio, para três valores de expoente de penalização.

Para $p = 1$, expoente tipicamente utilizado para o cálculo de volumes ou de massas volúmicas, a superfície de interpolação é um plano, pelo que a derivada é constante.

Atente-se no valor da propriedade resultante quando $(x_{e,1}, x_{e,2}) = (1, 1)$. Para este par de coordenadas o seu valor é $E_e = E^{(1)} + E^{(2)}$, ou seja, nesse elemento o material corresponde a uma junção fictícia dos dois materiais disponíveis para projecto, o que não é aceitável neste contexto. No fundo, a lei de interpolação deixa de fazer jus ao seu nome, pois é como se se passasse a ter uma extrapolação de propriedades de material. Isto deve-se ao facto de não ser colocada qualquer restrição no somatório das funções de peso, que neste caso não é necessariamente igual à unidade, como se pode ver na Figura 2.18.

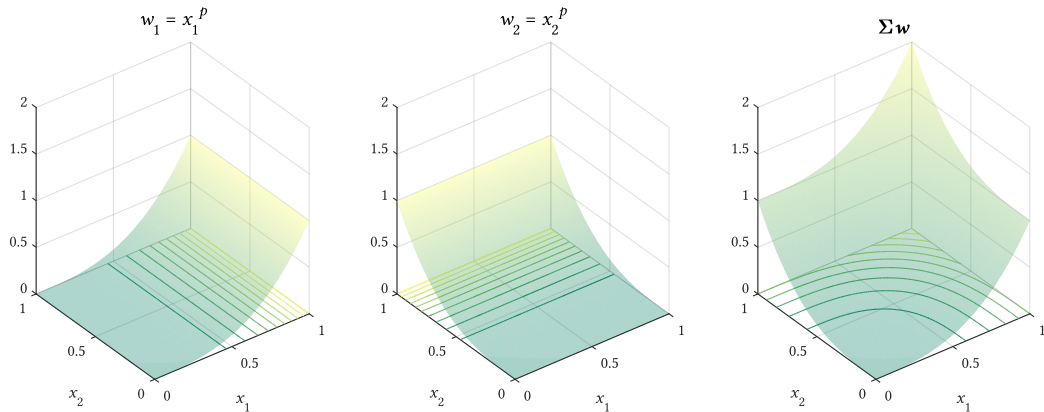


Figura 2.18: Funções de peso da lei DMO 1 para 2 fases de material sólido e 1 de vazio considerando $p = 3$.

Para além disso, foram também apontadas dificuldades em obter soluções discretas, isto é, com as variáveis de projecto nos seus valores limite. Deste modo, esta lei foi considerada como pouco recomendável nos trabalhos que introduziram o DMO [64, 89, 90].

No entanto, é importante referir que, em 2011, Hvejsel et al. [49] e Hvejsel & Lund [48] revisitaram esta lei e propuseram a imposição de um constrangimento linear por elemento para forçar que o somatório das funções de peso fosse igual à unidade. Para além disso, em Hvejsel et al. [49] foi investigada a possibilidade de incluir um constrangimento adicional para conduzir valores intermédios de densidade artificial para os valores limite, utilizando uma técnica de *continuation approach*. Na sequência da apresentação destas medidas passou a ser dada alguma importância a este modelo de interpolação, uma vez que desde aí passou a ser possível combinar a sua baixa complexidade com a obtenção de resultados fisicamente realistas, quer do ponto de vista do somatório das funções de peso, quer do ponto de vista dos valores de densidade na solução óptima.

No âmbito dos objectivos desta dissertação, destacam-se os trabalhos de Kennedy (2016) [51] e Lund (2018) [63]. Estas publicações são particularmente relevantes por fazerem parte dos escassos contributos onde são resolvidos problemas MMTO envolvendo massa e tensão, com recurso a métodos baseados na variável densidade, nomeadamente, o método *Discrete Material and Thickness Optimization* (DMTO). Este método, introduzido por Sørensen et al. [88], é uma extensão directa do DMO e foi idealizado para o projecto de materiais compósitos laminados onde se pretende controlar a presença de material, para além da sua selecção. Consiste apenas na adição de uma variável de projecto por elemento, $x_{e,0}$, que controla a ausência ou existência de material,

$$E_e = x_{e,0}^p \sum_{m=1}^{n^m} x_{e,m}^p E^{(m)} = x_{e,0}^p \left(x_{e,1}^p E^{(1)} + x_{e,2}^p E^{(2)} + \dots + x_{e,n^m}^p E^{(n^m)} \right) \quad (2.36)$$

Existindo agora n^m variáveis de selecção de material e 1 variável de topologia por elemento, o número total de variáveis de projecto é $n^e (n^m + 1)$.

Kennedy (2016) [51] fez uma adaptação do DMO 1 e utilizou um *full-space barrier method* para resolver problemas MMTO de minimização da massa com constrangimentos de tensão. A formulação utilizada pelo autor não se considera particularmente eficiente, na medida em que o número de constrangimentos de tensão é $n^e n^m$, pelo que o número de vezes que a tensão é avaliada em cada elemento é igual ao número de fases de material, independentemente da fase que se vier a seleccionar para esse elemento.

Os problemas resolvidos por Lund [63] consistiram em determinar a distribuição de ângulos de fibras óptima em vários materiais compósitos laminados, com o objectivo de minimizar o índice de falha máximo em cada lâmina sujeito a constrangimentos de massa. Os índices de falha são calculados com base nos critérios de tensão e extensão máxima e resultam de uma agregação dos valores de tensão local em valores globais com recurso a uma p -norm. O fenómeno da singularidade é ultrapassado através da consideração de diferentes expoentes para interpolar os tensores de rigidez e os índices de falha associados a cada fase de material, à semelhança do que acontece no qp -approach. A metodologia foi aplicada a quatro exemplos numéricos, incluindo uma pá de turbina eólica, o que permitiu comprovar a sua eficiência, contudo é possível apontar duas desvantagens. Por um lado, a consideração da tensão na função objectivo não permite garantir que no óptimo a solução é admissível do ponto de vista das tensões, por outro, a utilização de técnicas de agregação tem o problema de não controlar de forma rigorosa a tensão a nível local, o que mais uma vez não garante a obtenção de soluções admissíveis desse ponto de vista.

DMO 4

Esta lei de interpolação de material caracteriza-se pelo facto de todas as variáveis de projecto afectarem cada uma das funções de peso, como se pode observar na equação (2.37).

$$E_e = \sum_{m=1}^{n^m} \left[\underbrace{\left(x_{e,m}^p \prod_{i=1, i \neq m}^{n^m} (1 - x_{e,i}^p) \right)}_{w_{e,m}} E^{(m)} \right], \quad \begin{cases} p \geq 1 \\ 0 < x_{e,m} \leq 1 \end{cases} \quad (2.37)$$

Para melhor visualizar a expressão matemática por detrás da equação (2.37), particularize-se para 3 e 4 fases, ou seja, para $n^m = 2$ e $n^m = 3$, respectivamente.

$$n^f = 3, \quad n^m = 2:$$

$$E_e = \underbrace{x_{e,1}^p (1 - x_{e,2}^p)}_{w_{e,1}} E^{(1)} + \underbrace{x_{e,2}^p (1 - x_{e,1}^p)}_{w_{e,2}} E^{(2)} \quad (2.38)$$

$n^f = 4$, $n^m = 3$:

$$E_e = \underbrace{x_{e,1}^p (1 - x_{e,2}^p)(1 - x_{e,3}^p)}_{w_{e,1}} E^{(1)} + \underbrace{x_{e,2}^p (1 - x_{e,1}^p)(1 - x_{e,3}^p)}_{w_{e,2}} E^{(2)} + \underbrace{x_{e,3}^p (1 - x_{e,1}^p)(1 - x_{e,2}^p)}_{w_{e,3}} E^{(3)} \quad (2.39)$$

Tal como no DMO 1, o número total de variáveis de projecto é $n^e n^m$. Representando graficamente a equação (2.38),

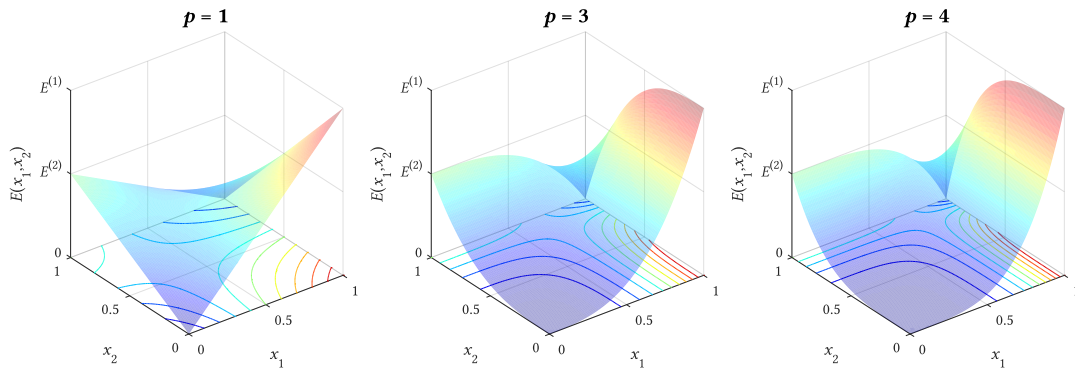


Figura 2.19: Representação gráfica da lei DMO 4 considerando 2 fases de material sólido e 1 de vazio, para três valores de expoente de penalização.

Esta lei tem a particularidade de não promover qualquer mistura entre as diferentes fases de material, pois veja-se que $E_e(1,1) = 0$, o que se deve ao facto da forma como as funções de peso são construídas. Neste caso, cada uma das funções de peso é afectada por todas as variáveis de projecto do elemento. Suponha-se que se pretende seleccionar o material 1 na equação (2.38). Para isso $w_{e,1}$ tem de ser igual a 1 e $w_{e,2}$ igual a 0. A função de peso $w_{e,1}$ apenas toma o valor unitário quando $x_{e,1} = 1$ e $x_{e,2} = 0$. Como consequência, $w_{e,2}$ toma o valor nulo e $E_e = E^{(1)}$. Na Figura 2.20 estão representadas graficamente as funções de peso e respectivo somatório para $n^m = 2$. Como resultado de não existir mistura de fases nesta lei de interpolação e contrariamente ao DMO 1, o somatório das funções de peso é sempre igual ou inferior à unidade. Este aspecto é positivo, no sentido em que a propriedade resultante nunca é extrapolada para um valor superior ao valor mais elevado dos materiais candidatos, porém pode ser extrapolada para um valor inferior ao valor mais baixo dos materiais candidatos, se se estiver em MMS. Embora isso não aconteça quando as variáveis de projecto estão nos seus valores limite, durante o processo de optimização o algoritmo pode passar por materiais sem significado físico no contexto

do problema. Em problemas MMTO, o facto de $0 < \Sigma w_{e,m} \leq 1$ não representa uma desvantagem, pois não existe uma função de peso associada à fase de vazio.

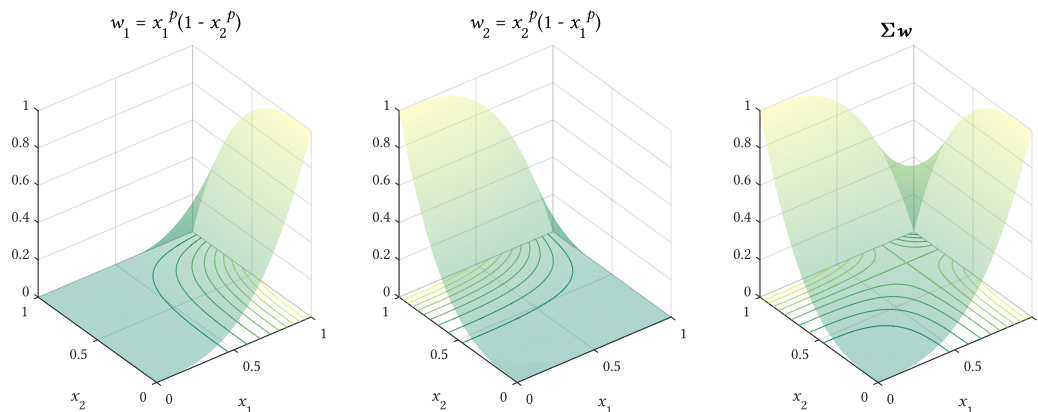


Figura 2.20: Funções de peso da lei DMO 4 para 2 fases de material sólido e 1 de vazio considerando $p = 3$.

Um outro aspecto a referir está relacionado com o facto de as funções de peso resultarem de vários produtos entre as variáveis de projecto, o que pode trazer problemas numéricos caso o limite inferior destas seja demasiado baixo, como já foi referido nas extensões do modelo SIMP. Por último, veja-se que a superfície de interpolação resultante do DMO 4 não é convexa. Na fase inicial desta dissertação foram feitos testes com esta lei e este aspecto constituiu uma dificuldade na passagem entre $E_e(1,0) = E^{(1)}$ e $E_e(0,1) = E^{(2)}$, uma vez que a trajetória não é monotona-decrescente.

Um exemplo de aplicação desta lei pode ser encontrado em Sanders et al. (2018) [80], onde os autores resolveram problemas MMTO de minimização da *compliance* com constrangimentos de volume e massa, considerando um máximo de 10 fases de material. Não tendo sido tomado nenhuma medida no sentido de mitigar valores intermédios de densidade na solução óptima do problema, os autores recorrem a duas heurísticas para pós-processar os resultados obtidos, apontando-se as mesmas desvantagens já referidas na técnica utilizada por Li & Kim [60].

DMO 5

O DMO 5 foi proposto com o objectivo de colmatar o facto do somatório das funções de peso nem sempre ser unitário no DMO 4. Para isso, é introduzindo um denominador comum a todas as funções de peso, que as normaliza e assegura que o seu somatório é unitário independentemente do valor das variáveis de projecto. Para um número arbitrário de materiais candidatos tem-se,

$$E_e = \sum_{m=1}^{n^f} \underbrace{\left(\frac{\hat{w}_{e,m}}{\sum_{k=1}^{n^f} \hat{w}_{e,k}} \right)}_{w_{e,m}} E^{(m)}, \quad \begin{cases} p \geq 1 \\ 0 < x_{e,m} \leq 1 \end{cases} \quad (2.40)$$

em que $\hat{w}_{e,m} = x_{e,m}^p \prod_{i=1, i \neq m}^{n^f} (1 - x_{e,i}^p)$

Na Figura 2.21 é possível visualizar graficamente esta lei para três valores de expoente de penalização, considerando $n^m = 2$.

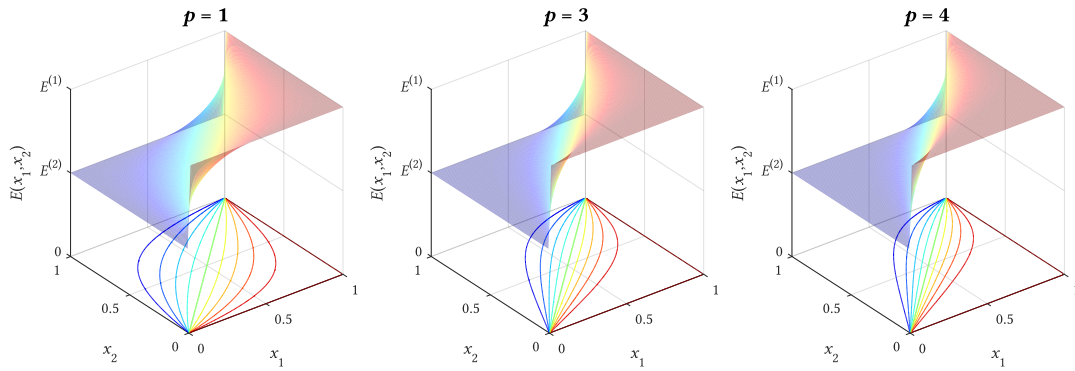


Figura 2.21: Representação gráfica da lei DMO 5 considerando 2 fases de material sólido, para três valores de expoente de penalização.

Faz-se notar que existem algumas dificuldades em enviar as variáveis de projecto para os seus valores limite, uma vez que não existe um desfavorecimento significativo dos valores intermédios de densidade. A superfície de interpolação consiste basicamente na junção de uma planície triangular ($E_e \simeq E^{(2)}$) com um planalto triangular ($E_e \simeq E^{(1)}$), o que faz com que existam muitos pontos favoráveis associados a densidades intermédias. O aumento do expoente de penalização tem o efeito de tornar mais definidos a planície e o planalto e, como consequência disso, faz com que a transição entre estes seja mais abrupta, o que pode conduzir a instabilidades numéricas, como se comprovou numa fase inicial desta dissertação. Como se pode observar pela Figura 2.22, qualquer que seja o valor das variáveis de projecto, o somatório das funções de peso é sempre unitário. Note-se que o número total de variáveis de projecto é $n^e n^f$, independentemente do tipo de problema.

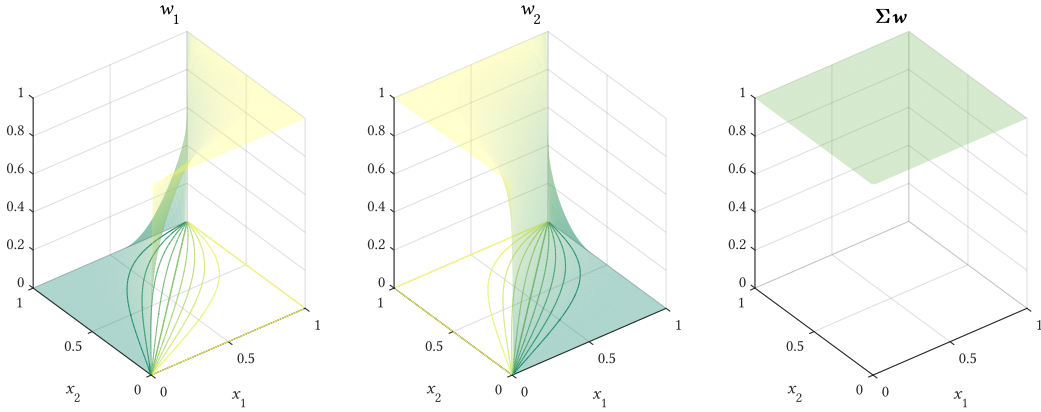


Figura 2.22: Funções de peso da lei DMO 5 para 2 fases de material sólido considerando $p = 3$.

Caso se pretenda resolver um problema SMT0 ou MMTO a fase de vazio deve ser considerada de forma explícita, isto é, tem de ter uma função de peso associada e, como consequência, uma variável de projecto, enquanto que tanto no DMO 1 ou DMO 4 isso não é necessário. Para melhor compreender este aspecto considere-se um problema SMT0 ($n^f = 2$). A lei de interpolação toma a forma da equação (2.41), em que $E^{(2)} = 0$, pelo que o termo $w_{e,2}E^{(2)}$ está omitido. Apenas se apresenta este caso particular a título explicativo, pois existem leis mais adequadas para resolver este tipo de problema.

$$E_e = \frac{x_{e,1}^p (1 - x_{e,2}^p)}{x_{e,1}^p (1 - x_{e,2}^p) + x_{e,2}^p (1 - x_{e,1}^p)} E^{(1)} \quad (2.41)$$

Em problemas dinâmicos de MMS é necessário que o somatório das funções de peso seja unitário, caso contrário pode existir a possibilidade em que as funções de peso utilizadas na interpolação das propriedades da matriz de massa tomem o valor nulo, o que inviabiliza a resolução das equações de equilíbrio do problema. Um exemplo de aplicação desta lei pode ser consultado em Niu et al. [69], onde foram resolvidos problemas de vibro-acústica em materiais compósitos laminados.

2.3.4.3 Ordered SIMP interpolation

Ainda dentro dos métodos baseados na variável densidade, Zuo & Saitou (2017) [113] propuseram o chamado *Ordered SIMP interpolation*. A principal característica deste modelo de interpolação prende-se com o facto de não adicionar qualquer variável de projecto, independentemente do número de fases de material, o que o torna particularmente atractivo do ponto de vista do custo computacional. As propriedades dos materiais disponíveis são ordenadas por ordem crescente e atribui-se a cada um deles um intervalo de valores de densidade artificial normalizada \hat{x}_m ,

$$x_m = \frac{\hat{x}_m}{x_{max}} \quad , \quad m = 1, 2, \dots, n^m \quad (2.42)$$

Em que x_{max} é o máximo de todas as densidades artificiais. Introduzindo os coeficientes de escala A_E e translação B_E , o módulo de Young num dado elemento é dado de acordo com a seguinte equação,

$$E_e = A_E x_e^p + B_E \quad , \quad 0 < x_e \leq 1$$

em que:
$$\begin{cases} A_E = \frac{E^{(m)} - E^{(m+1)}}{x_m^p - x_{m+1}^p} \\ B_E = E^{(m)} - A_E x_m^p \end{cases} \quad \forall \quad x_e \in [x_m, x_{m+1}] \quad (2.43)$$

Para interpolar funções como o custo ou a massa os autores recomendam a substituição do expoente p por $1/p$, por forma a que valores intermédios de densidade estejam associados a valores elevados de massa ou custo. Na Figura 2.23 apresenta-se uma visualização gráfica da lei de interpolação para o módulo de Young e para o custo, considerando 3 materiais.

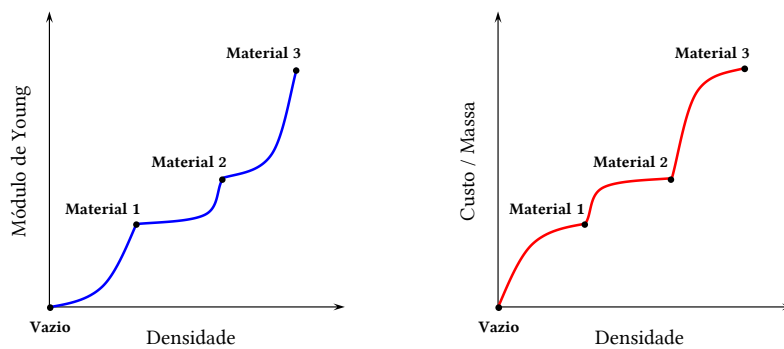


Figura 2.23: Representação gráfica do *Ordered SIMP interpolation* para interpolação do módulo de Young e para funções de custo ou massa.

Embora se reconheçam vantagens numa lei de interpolação com estas características, é importante notar que a curva de interpolação tem derivada descontínua, o que não é de todo recomendável quando se utilizam algoritmos de optimização baseados na informação do gradiente. Os autores reconhecem este problema e argumentam alegando que a probabilidade de o algoritmo parar exactamente num dos pontos sem derivada é muito reduzida, o que é um argumento válido, contudo não deixa de existir essa possibilidade.

Como exemplos de aplicação desta lei faz-se referência, por exemplo, ao trabalho de Zhang et al. [108], onde foram resolvidos problemas de optimização topológica multimaterial de minimização da *compliance* considerando duas escalas de análise. Um outro exemplo é o trabalho de Lu et al. [62], já referido na secção 2.2.

2.3.4.4 Outros

O interesse no desenvolvimento de técnicas capazes de lidar com múltiplas fases de material em optimização topológica não foi exclusivo dos métodos baseados na variável densidade, tendo-se verificado avanços também em metodologias como o *level-set method*, *phase-field method* ou outros métodos baseados em heurísticas.

No âmbito do *level-set method* (LSM), o primeiro trabalho a considerar múltiplas fases de material foi publicado em 2004 sob autoria de Wang & Wang [102], onde se aplicaram os chamados “color” *level-sets* em problemas de optimização estrutural. Na sua essência, o LSM define as interfaces entre diferentes fases de material através das curvas de nível de n^{LSF} *level-set functions* (LSF’s), ϕ_j , com $(j = 1, 2, \dots, n^{LSF})$. Em SMT0, basta uma LSF para definir implicitamente os pontos \mathbf{s} do domínio Ω que fazem parte do domínio ocupado por material Ω^j ,

$$\begin{cases} \phi_j(\mathbf{s}) > 0 & , \quad \forall \mathbf{s} \in \Omega^j & \cdots & \text{material} \\ \phi_j(\mathbf{s}) = 0 & , \quad \forall \mathbf{s} \in \Gamma^j & \cdots & \text{interface} \\ \phi_j(\mathbf{s}) < 0 & , \quad \forall \mathbf{s} \in \Omega \setminus (\Omega^j \cup \Gamma^j) & \cdots & \text{vazio} \end{cases} \quad (2.44)$$

O número máximo de fases de material que é possível considerar com um número arbitrário de LSF’s é $n^f = 2^{n^{LSF}}$, sendo que o domínio associado a cada fase de material é dado em função dos valores das várias LSF’s. A título de exemplo, faz-se referência à Figura 2.24, onde se simplifica o processo de definição de cada um dos subdomínios, considerando 3 fases de material sólido e 1 de vazio.

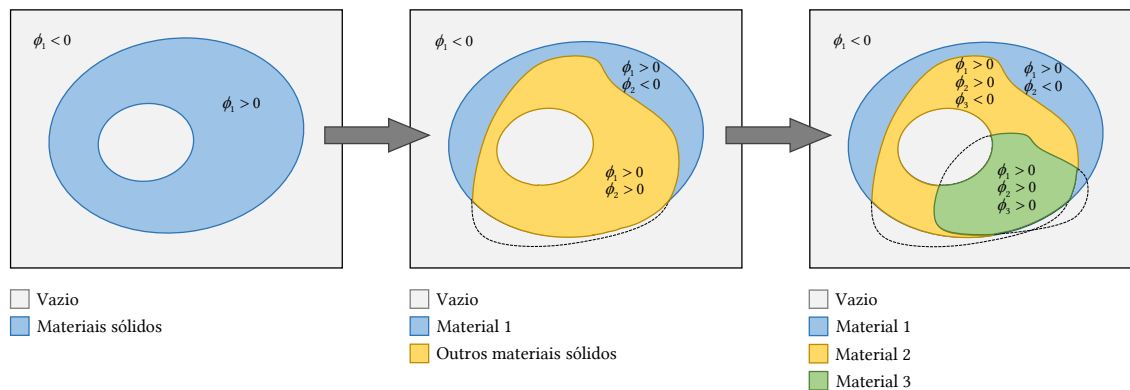


Figura 2.24: Definição implícita dos diferentes subdomínios de material em função do valor das level-set functions, considerando 3 fases de material sólido e 1 de vazio. (Adaptado de [104])

Tipicamente, as LSF's são funções radiais que são modificadas ao longo da otimização em conformidade com a equação de Hamilton-Jacobi, que não permite a criação de furos para além dos já existentes na estrutura inicial, o que faz com que o resultado seja fortemente dependente do *design* inicial. Ainda assim, é possível permitir a nucleação de novos furos através de heurísticas ou de informação baseada na derivada topológica num passo à parte do processo de optimização, o que acaba por afectar a convergência do algoritmo e aumentar o custo computacional [85]. Uma das vantagens do LSM prende-se com o facto de proporcionar uma distinção matematicamente rigorosa das interfaces entre as diferentes fases de material. No entanto, é necessário adaptar a malha de elementos finitos à fronteira dos subdomínios de material, o que é particularmente relevante em problemas que envolvam a tensão. Como é sabido, o fenómeno da concentração de tensões é mais propício de ocorrer na fronteira (2D) ou superfície delimitadora (3D) de uma estrutura, pelo que é essencial que o valor de tensão lido nesses elementos seja calculado de forma rigorosa.

Guo et al. (2014) [42] evoluíram os trabalhos já desenvolvidos para a resolução de problemas SMT0 com constrangimentos de tensão [41, 107] para uma formulação MMTO. Após a contribuição de Ramani [73], onde o autor recorreu a heurísticas para resolver problemas de optimização topológica multimaterial com constrangimentos de tensão, este trabalho foi pioneiro na utilização de métodos de optimização baseados no gradiente para resolver este tipo de problema. O campo de deslocamentos é determinado com recurso ao *eXtended Finite Element Method* (X-FEM), que se caracteriza pela utilização de funções de forma enriquecidas nos elementos em torno das interfaces de cada uma das fases de material. Para além disso, o facto de se fazer uma reconstrução da malha de elementos finitos em torno das interfaces faz com que a

propriedade do material e o correspondente campo de tensões desses elementos seja contínuo, obtendo-se um modelo numérico mais realista. Uma das vantagens da adaptação da malha de elementos finitos à fronteira resultante do LSM prende-se com o facto de se conseguir fazer uma distinção clara dos elementos que estão associados à presença ou ausência de material. Como consequência, a tensão não é avaliada em elementos associados à fase de vazio e não é necessário tomar qualquer medida relativamente ao fenómeno da singularidade. A formulação dos problemas consistiu na minimização da *compliance* com constrangimentos de tensão e de volume, tendo sido testada em quatro exemplos numéricos.

Chu et al. (2018) [19] optimizaram mecanismos flexíveis considerando 3 fases de material (2 de sólido, 1 de vazio). Os problemas resolvidos tiveram subjacente uma formulação multi-objectivo que engloba 3 termos: (1) deslocamento negativo num ponto oposto à aplicação de uma carga pontual, (2) *compliance* e (3) termo de penalização caso se verifiquem tensões superiores à admissível. Embora este trabalho culmine MMTO com tensão, semelhante ao que se pretende apresentar com esta dissertação, apontam-se algumas desvantagens. Primeiro, o facto da tensão não ser considerada como constrangimento não garante que a solução óptima seja admissível desse ponto de vista. Segundo, o termo de penalização depende de uma constante que deve ser afinada em função do problema a resolver. Por último, aponta-se o facto de não ser adoptada qualquer estratégia que modifique a malha de elementos finitos e a aproxime às curvas de nível do LSM.

Dentro do LSM, refere-se ainda Chu et al. (2019) [20], que é um desenvolvimento do trabalho anteriormente referido para problemas de elasticidade plana. Os autores consideram agora uma condição necessária de paragem, que requer que a tensão máxima verificada em cada fase de material seja inferior à respectiva tensão admissível.

No âmbito do *phase-field method*, método que se baseia essencialmente na equação de Cahn-Hilliard para a separação de fluidos, faz-se referência a *e.g.* [98, 110], onde são resolvidos problemas de MMTO de minimização da *compliance*. À data da redacção desta dissertação não foram encontradas publicações onde o PFM fosse utilizado para resolver problemas de MMTO com tensão.

FUNDAMENTOS DE OPTIMIZAÇÃO

3.1 Formulação standard

O projecto óptimo de estruturas requer uma formulação matematicamente rigorosa do problema que se pretende resolver. Nesta formulação são definidas variáveis de projecto, cujo valor vai sendo alterado ao longo de um processo iterativo controlado por um algoritmo de optimização, para que uma determinada função objectivo sujeita a constrangimentos seja minimizada ou maximizada. Um problema de optimização estrutural pode ser formulado seguindo uma formulação *standard*, apresentada na equação (3.1).

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & \begin{cases} g_j(\mathbf{x}) \leq 0 & , \quad j = 1, \dots, m \\ h_k(\mathbf{x}) = 0 & , \quad k = 1, \dots, p \\ \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i & , \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Em que \mathbf{x} é o vector das n variáveis de projecto, $f(\mathbf{x})$ é a função objectivo, $g_j(\mathbf{x})$ são os m constrangimentos de desigualdade, $h_k(\mathbf{x})$ são os p constrangimentos de igualdade e $\underline{x}_i, \bar{x}_i$ são os limites inferior e superior das variáveis de projecto x_i , respectivamente.

Na prática, dependendo do problema e da fase em que se está do projecto, nem sempre é possível enunciar uma formulação, uma vez que pode não ser fácil identificar com clareza todas as variáveis de projecto e a sua influência na minimização ou maximização de uma dada medida de *performance* do sistema em análise [7].

3.2 Algoritmos de optimização

Estando o problema formulado de forma rigorosa, é necessário criar um modelo numérico do sistema a analisar, recorrendo-se na grande maioria das vezes ao MEF para esse efeito. Assim, estão reunidas as condições para que seja implementado um algoritmo de optimização. A utilização de uma ferramenta deste tipo traz vantagens como a facilidade em lidar de forma automática com um elevado número de variáveis de projecto e constrangimentos. Um algoritmo de optimização pode ser enquadrado numa das duas categorias seguintes: (1) algoritmos baseados no gradiente e (2) algoritmos não baseados no gradiente.

Os primeiros são conhecidos por serem computacionalmente pouco dispendiosos, contudo a sua utilização requer que a função objectivo e constrangimentos dependam continuamente das variáveis de projecto e que sejam diferenciáveis em todos os pontos. Nestes algoritmos, começa-se por estipular um ponto do espaço de projecto como ponto de partida e executa-se uma análise de elementos finitos. Com os resultados dessa análise verificam-se os valores dos constrangimentos, as sensibilidades e as condições de optimalidade de KKT (Karoush-Kuhn Tucker). Caso a solução seja admissível e verifique os critérios de convergência o algoritmo pára e essa é a solução óptima. Caso contrário, dá-se início a uma nova iteração. Selecciona-se um novo ponto do espaço de projecto e executa-se uma nova análise. Na Tabela 3.1 apresenta-se uma síntese das etapas descritas anteriormente. O processo repete-se até que uma solução admissível respeite as condições de optimalidade.

Tabela 3.1: Algoritmo de optimização geral aplicável a optimização constrangida e não constrangida.

1ª Etapa	Estimar um ponto de partida $\mathbf{x}^{(0)}$ que representa uma estimativa inicial do ponto óptimo e inicializar o contador das iterações, $k = 0$.
2ª Etapa	Calcular uma direcção de procura, \mathbf{d}^k , no espaço de projecto. Esta etapa depende se o problema é constrangido ou não constrangido, na medida em que é necessário calcular o valor dos gradientes da função objectivo e constrangimentos.
3ª Etapa	Verificação da convergência do algoritmo com base nas condições de optimalidade ou na satisfação de algum critério de paragem. Caso exista convergência, o processo iterativo termina.
4ª Etapa	Cálculo do passo óptimo α_k , na direcção de procura \mathbf{d}^k .
5ª Etapa	Cálculo de um novo ponto no espaço de projecto, $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}$ Fazer $k = k + 1$ e voltar à 2ª Etapa.

Pela Tabela 3.1 constata-se que a determinação da perturbação a impor nas variáveis de projecto, $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} = \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}$, pode ser dividida em duas partes, cálculo da direcção de procura \mathbf{d}^k e cálculo do passo óptimo α_k , que determina quanto se deve avançar na direcção de procura. O facto destes algoritmos se basearem no valor das derivadas da função objectivo e dos constrangimentos para progredir na optimização faz com que exista a possibilidade de convergirem para soluções que, embora cumpram as condições de optimalidade de KKT, podem não ser óptimas globais.

Por outro lado, os algoritmos que não se baseiam na informação do gradiente utilizam técnicas de natureza probabilística e/ou heurística para progredir na optimização, podendo lidar com variáveis de projecto discretas ou mistas, o que lhes permite fazer um varrimento muito mais amplo do espaço de projecto. Por meta-heurística entende-se um processo iterativo de geração de soluções, que utiliza uma ou mais heurísticas para progredir no processo de optimização, combinadas com diferentes técnicas de pesquisa e exploração do espaço de projecto. Uma das vantagens destes métodos é a capacidade de escapar a soluções com optimalidade local, através da aceitação de pontos vizinhos do ponto actual que, embora possam agravar o valor da função objectivo, podem posteriormente conduzir o algoritmo a uma solução com um valor de função objectivo melhor. A grande desvantagem destes métodos é o seu custo computacional, que é extremamente elevado a partir de um valor razoável de variáveis de projecto, deixando de ser elegíveis para resolução de problemas de optimização topológica com um grau de complexidade elevado.

De seguida, apresenta-se de forma breve os algoritmos de optimização utilizados no desenvolvimento desta dissertação.

3.2.1 Programação Quadrática Sequencial (SQP)

O algoritmo de Programação Quadrática Sequencial (SQP, *Sequential Quadratic Programming*) [81] é um método baseado no gradiente capaz de resolver problemas de optimização não linear constrangida. No âmbito desta dissertação, o SQP foi utilizado numa fase inicial, recorrendo à *toolbox* de optimização `fmincon` do MATLAB.

O SQP caracteriza-se por transformar a formulação do problema original num problema aproximado de programação quadrática (QP). Nos problemas QP, faz-se uma aproximação da função objectivo com uma função quadrática, através uma expansão em série de Taylor até ao termo de 2ª ordem. Os constrangimentos são linearizados com uma expansão em série de Taylor

até ao termo de 1ª ordem. Cada um dos problemas QP pode ser apresentado de acordo com a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{d} + \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d} + f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & \begin{cases} \nabla g_j(\mathbf{x})^T \mathbf{d} + g_j(\mathbf{x}) \leq 0 & , \quad j = 1, \dots, m \\ \nabla h_k(\mathbf{x})^T \mathbf{d} + h_k(\mathbf{x}) = 0 & , \quad k = 1, \dots, p \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Na equação (3.2), \mathbf{H} é a matriz hessiana da função Lagrangeana, que por sua vez se define da seguinte forma para um problema de optimização constrangida:

$$L(\mathbf{x}, \lambda_g, \lambda_h) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_{g,j} (g_j(\mathbf{x}) + s_j^2) + \sum_{k=1}^p \lambda_{h,k} h_k(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

Em que, λ_g e λ_h são os multiplicadores de Lagrange dos constrangimentos de desigualdade e igualdade, respectivamente. s_j são variáveis artificiais que possibilitam a transformação dos constrangimentos de desigualdade em constrangimentos de igualdade.

Com o decorrer desta dissertação foi necessário adoptar estratégias que fizeram com que o Método das Assíptotas Móveis (MMA) fosse mais atractivo para resolver os problemas de optimização, nomeadamente, a necessidade de estipular um número fixo de iterações para que a estratégia de penalização apresentada no Capítulo 4 se fizesse de forma equitativa para todos os problemas.

3.2.2 Método das Assíptotas Móveis (MMA)

O Método das Assíptotas Móveis (MMA, *Method of Moving Asymptotes*) foi apresentado em 1987 por Krister Svanberg [96] como um novo método para a resolução de problemas de optimização não linear constrangida. Desde então, tem ganho muita popularidade na resolução de problemas de optimização estrutural. Devido às suas características de convexidade e separabilidade, é particularmente adequado para problemas de dimensão elevada, como é o caso dos problemas de optimização topológica [11].

O MMA resolve o problema de optimização original aproximando-o numa sequência de subproblemas mais simples ao longo de um processo iterativo. Os subproblemas são construídos com base em informação proveniente dos gradientes da função objectivo e constrangimentos no ponto da iteração actual, assim como outros pontos do histórico da optimização. O código

MATLAB utilizado nesta dissertação assume que o problema de optimização está formulado de acordo com a equação (3.4). Para um problema original com n variáveis de projecto e m constrangimentos, as variáveis durante o processo de optimização são $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ e z .

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\mathbf{x}) + a_0 z + \sum_{i=1}^m \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \right) \\ \text{s.a.} \quad & \begin{cases} f_i(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq 0 & i = 1, \dots, m \\ x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max} & j = 1, \dots, n \\ y_i \geq 0 & i = 1, \dots, m \\ z \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Em que, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ são as variáveis de projecto do problema original e tanto $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ como z são variáveis artificiais criadas pelo algoritmo. A função objectivo $f_0(\mathbf{x})$ e os constrangimentos $f_i(\mathbf{x})$ assumem-se reais e continuamente diferenciáveis. Os parâmetros a_0 e a_i são reais que deverão satisfazer as condições $a_0 > 0$ e $a_i \geq 0$. c_i e d_i são também valores reais, mas que devem satisfazer $c_i \geq 0$, $d_i \geq 0$ e $c_i + d_i > 0$. Numa dada iteração k , considera-se um subproblema em que as funções $f_0(\mathbf{x})$ e $f_i(\mathbf{x})$ são aproximadas por funções convexas $\tilde{f}_0^{(k)}(\mathbf{x})$ e $\tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x})$, respectivamente. Estas aproximações são construídas com base nas sensibilidade da iteração actual, mas também com base em informação de iterações anteriores considerada de forma implícita. O subproblema pode então ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{f}_0^{(k)}(\mathbf{x}) + a_0 z + \sum_{i=1}^m \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \right) \\ \text{s.a.} \quad & \begin{cases} \tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq 0 & i = 1, \dots, m \\ \alpha_j^{(k)} \leq x_j \leq \beta_j^{(k)} & j = 1, \dots, n \\ y_i \geq 0 & i = 1, \dots, m \\ z \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aqui, $\alpha_j^{(k)}$ e $\beta_j^{(k)}$ são os “limites móveis” que influenciam a gama de valores dentro da qual a função convexa   construída e permite obter respostas aceitáveis no contexto do problema. O parâmetro c_i tem a função de penalizar o ponto da iteração actual quando os constrangimentos não são satisfeitos e teve particular relevância no decorrer desta dissertação. Chegou-se   conclusão de que, para os problemas aqui resolvidos, os valores de c_i que permitiram alcançar soluções admissíveis foram 10^6 , 10^7 ou 10^8 . Quanto maior o valor de c_i , maior é a penalização e maior

é a probabilidade de o algoritmo convergir para uma solução admissível. No entanto, se c_i for demasiado elevado podem ocorrer instabilidades numéricas.

A solução óptima do subproblema da equação (3.5) é utilizada como o ponto da iteração seguinte, $(\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{y}^{(k+1)}, z^{(k+1)})$, e o processo repete-se de forma iterativa até que algum critério de paragem seja satisfeito (e.g. tolerância nas condições de optimalidade e/ou número de iterações). Como já foi referido, nesta dissertação estipulou-se como condição de paragem um número fixo de iterações para cada problema, de forma a garantir equidade no tratamento dos vários problemas resolvidos (aspecto detalhado no Capítulo 4).

3.2.3 Algoritmo Genético (AG)

Os algoritmos genéticos (AG) foram apresentados por Holland em 1975 [46] e são meta-heurísticas que se baseiam em princípios da genética e sistemas adaptativos. Nesta dissertação, utilizou-se o algoritmo genético simples [38] como termo de comparação para os resultados obtidos com o MMA, de maneira a perceber se o óptimo alcançado por este último é local ou se é potencialmente global (caso o valor da função objectivo seja igual ou inferior ao obtido pelo AG).

3.3 Cálculo de sensibilidades

Ao estudo da variação de uma função relativamente a uma determinada variável ou conjunto de variáveis de projecto dá-se o nome de análise de sensibilidades ou, em inglês, *design sensitivity analysis* (DSA). Quando se lida com funções com alguma complexidade, o cálculo dos gradientes por derivação simples pode ser impeditivo, sendo necessário utilizar métodos numéricos, que aproximam o valor dos gradientes, ou analíticos que, por meio de manipulações algébricas, obtêm o mesmo resultado que seria calculado derivando analiticamente da forma tradicional. O cálculo de sensibilidades por estas vias está normalmente associado à maior porção do custo computacional de um processo de optimização [44]. Deste modo, não basta ter à disposição um método para o cálculo de sensibilidades, é fulcral que esse cálculo seja feito de forma eficiente.

3.3.1 Método das diferenças finitas

O método das diferenças finitas é bastante utilizado na avaliação numérica de gradientes, devido à sua facilidade de implementação. Assumindo uma função Ψ de n variáveis, o valor da sensibilidade dessa função relativamente a uma variável x_i num ponto do espaço de projecto é

estimado recorrendo à definição de derivada parcial e impondo uma perturbação na variável relativamente à qual se está a calcular a sensibilidade. Destacam-se as seguintes variantes,

Diferenças finitas progressivas (*forward*):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \approx \frac{\Psi(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - \Psi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \quad (3.6)$$

Diferenças finitas regressivas (*backward*):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \approx \frac{\Psi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - \Psi(x_1, \dots, x_i - \Delta x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \quad (3.7)$$

Diferenças finitas centrais (*central*):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \approx \frac{\Psi\left(x_1, \dots, x_i + \frac{1}{2}\Delta x_i, \dots, x_n\right) - \Psi\left(x_1, \dots, x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i, \dots, x_n\right)}{\Delta x_i} \quad (3.8)$$

De notar que, apesar das diferenças finitas centrais permitirem obter resultados mais precisos, requerem que o valor da função seja avaliado o dobro das vezes.

Embora este método seja fácil de implementar, apresenta algumas desvantagens. Por um lado, existe o custo computacional associado a calcular o valor da função sempre que se perturba determinada variável de projecto, por outro, existe a falta de exactidão no cálculo da derivada associada a certos valores de passo. O erro no cálculo de sensibilidades por diferenças finitas é resultado de dois aspectos, o facto de se negligenciar termos da expansão em série de Taylor, que ganha relevância para valores de passo elevados, e o erro numérico cometido em arredondamentos, que surge particularmente para valores de passo muito pequenos. Assim, existe uma gama de valores de passo restrita, para a qual os resultados obtidos por diferenças finitas são satisfatórios, o que nem sempre é fácil de determinar e depende de caso para caso [44].

3.3.2 Métodos analíticos

Atente-se ao facto de um problema de optimização estrutural ter subjacente, na grande maioria dos casos, uma discretização de um dado sistema em elementos finitos, pelo que as equações de equilíbrio são expressas seguindo uma formulação clássica:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.9)$$

Em que \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, \mathbf{u} o vector de deslocamentos e \mathbf{f} o vector de carregamentos. Por simplicidade, considera-se que a função Ψ depende de uma só variável x ,

$$\Psi = \Psi(x, \mathbf{u}(x)) \quad (3.10)$$

A sensibilidade de Ψ relativamente a x é calculada de forma analítica recorrendo ao conceito de derivada total e aplicando a regra da cadeia, obtendo-se o resultado da equação (3.11), onde é visível a dependência explícita e implícita da função relativamente à variável de projecto.

$$\frac{d\Psi}{dx} = \underbrace{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)}_{\text{parte explícita}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right)}_{\text{parte implícita}} \quad (3.11)$$

Tipicamente, a parte explícita é nula ou fácil de calcular, assim como $\partial \Psi / \partial \mathbf{u}$ é também fácil de obter, pelo que a principal dificuldade reside no cálculo de $d\mathbf{u}/dx$. Derivando a equação (3.9) em ordem a x , resolvendo para $d\mathbf{u}/dx$ e substituindo em (3.11), obtém-se,

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1}(x) \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{K}(x)}{\partial x} \mathbf{u} \right] \quad (3.12)$$

Surgem então duas abordagens com adequabilidade a situações distintas para fazer face à pouco recomendada utilização da matriz de rigidez global inversa, o método da diferenciação directa e o método adjunto.

3.3.2.1 Método da diferenciação directa

Pelo método da diferenciação directa, $d\mathbf{u}/dx$ é calculado directamente através de um sistema de equações, (3.13), e pode ser desde logo inserido na equação (3.11).

$$\mathbf{K} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{K}(x)}{\partial x} \mathbf{u} \right] \quad (3.13)$$

Neste caso, havendo apenas uma variável de projecto, o número de sistemas de equações a resolver é um, contudo, num problema com n variáveis de projecto é necessário resolver n sistemas de equações.

3.3.2.2 Método adjunto

Como alternativa ao método da diferenciação directa tem-se o método adjunto. Começa-se por determinar o vector adjunto, λ , através da seguinte equação,

$$\mathbf{K}\lambda = \mathbf{z} \quad , \quad z_i = \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \quad (3.14)$$

Aqui, \mathbf{z} é o vector de carregamentos fictício ou *dummy-load*, sendo que cada uma das suas entradas correspondem à derivada da função relativamente a cada um dos deslocamentos. Substituindo λ em (3.12), obtém-se (3.15), pelo que a sensibilidade de Ψ relativamente a x pode agora ser calculada.

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \lambda^T \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{K}(x)}{\partial x} \mathbf{u} \right] \quad (3.15)$$

3.3.2.3 Comparação

Tal como anteriormente referido, na resolução de um problema de optimização com n variáveis de projecto e m constrangimentos, o esforço computacional associado ao método da diferenciação directa está relacionado com o número de variáveis de projecto e com o número de constrangimentos no caso do método adjunto, o que se pode observar de forma intuitiva na equação (3.16).

Método da diferenciação directa	Método adjunto
$\mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right] \quad , \quad i = 1, \dots, n$	$\mathbf{K}\lambda_j = \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \quad , \quad j = 1, \dots, m$
$\begin{aligned} \frac{d\Psi_1}{dx_i} &= \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} \\ \frac{d\Psi_2}{dx_i} &= \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_i} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} \\ &\vdots \\ \frac{d\Psi_m}{dx_i} &= \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_i} + \frac{\partial \Psi_m}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{d\Psi_1}{dx_i} &= \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i} + \lambda_1^T \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right] \\ \frac{d\Psi_2}{dx_i} &= \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_i} + \lambda_2^T \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right] \\ &\vdots \\ \frac{d\Psi_m}{dx_i} &= \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_i} + \lambda_m^T \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$

Facilmente se é levado a concluir que o método da diferenciação directa e o método adjunto são os mais adequados quando $n < m$ e $m < n$, respectivamente, e que, para $n \approx m$, os métodos são igualmente eficientes. Na verdade, o projectista pode perceber quais são os constrangimentos críticos para o projecto numa fase de teste, isto é, os constrangimentos violados, activos ou quase activos. Nesse sentido, o cálculo das sensibilidades é feito apenas relativamente a esse número de constrangimentos, m^{crit} . Pode haver casos onde $m^{crit} < n < m$, o que faz com que o método adjunto seja mais eficiente mesmo quando o número total de constrangimentos m é superior ao número de variáveis de projecto. Para além disso, num contexto de projecto estrutural, normalmente é necessário considerar vários casos de carga, sendo que nesse caso o esforço computacional aumenta na mesma proporção para ambos os métodos, pois há um vector de deslocamentos \mathbf{u} associado a cada caso de carga. No entanto, o número de constrangimentos críticos m^{crit} , é pouco sensível ao número de casos de carga, o que permite descartar casos de carga sem influência na activação de constrangimentos. Uma vez que, geralmente, $m^{crit} \ll n^{LC} \times n$ o método adjunto é preferível em problemas com múltiplos casos de carga. É lógico que em situações onde $n^{LC} \times n < m^{crit}$, o método da diferenciação directa é o mais eficiente.

FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

4.1 Introdução

O foco desta dissertação consiste na apresentação de uma metodologia, baseada na utilização de um algoritmo de optimização que utilize a informação do gradiente, para resolver problemas de optimização topológica multimaterial de estruturas reticuladas com constrangimentos de tensão, em que se utiliza um método baseado na variável de densidade artificial para tornar o problema discreto num problema contínuo. Ao longo deste capítulo pretende-se dar uma sequência lógica na evolução das formulações dos problemas, para que seja possível compreender de forma gradual todas as decisões tomadas. Nesse sentido, começam-se por apresentar as classes de problemas resolvidos nesta dissertação, classificados em função do número e características das fases de material consideradas.

De seguida, começam-se por apresentar formulações relevantes do ponto de vista discreto, nomeadamente o problema clássico de minimização da *compliance* com constrangimento de massa ou volume e o problema de minimização da massa com constrangimentos de tensão. Os problemas de minimização da *compliance* encontram-se amplamente documentados na literatura e são de uma complexidade inferior comparativamente ao que se pretende desenvolver com este trabalho.

Os problemas discretos são formulados por duas razões. Primeiro, um problema de optimização topológica é, na sua essência, um problema de natureza discreta, onde se pretende determinar em cada ponto do domínio a existência ou não de material e, se for caso disso, qual o material presente nesse ponto do domínio. Segundo, como já foi referido, utilizou-se o AG para tentar atribuir validade aos resultados obtidos pelo MMA, pelo facto de o primeiro ter a capacidade de escapar a mínimos locais.

Para que os problemas sejam resolúveis por um algoritmo que utilize a informação do gradiente é necessário relaxar o problema através da introdução de variáveis contínuas de densidade artificial. Posto isto, foi necessário escolher uma lei de interpolação de material para que

fosse possível considerar múltiplas fases de material, tendo-se optado pelo DMO 1, dada a baixa complexidade das suas funções de peso. Como foi referido no Estado da Arte desta dissertação, este modelo de interpolação só passou a receber interesse por parte da comunidade científica após a apresentação de algumas estratégias nos trabalhos de Hvejsel & Lund [48] e Hvejsel et al. [49]. Aqui, essas estratégias são adaptadas para fazer face às desvantagens deste modelo de interpolação na sua forma original. Para além disso fundamenta-se a utilização de uma *continuation approach* e detalham-se todos os aspectos inerentes aos problemas de minimização da massa com constrangimentos de tensão.

4.2 Classes de problemas

Nesta dissertação, os problemas de optimização topológica resolvidos englobam sempre uma fase de vazio, pretendendo-se determinar a presença ou ausência de material em todos os pontos do domínio inicial de projecto. Dependendo da complexidade do problema a resolver, considera-se um mínimo de uma fase de material sólido. Relativamente ao número e características das fases de material envolvidas, os problemas podem ser classificados de acordo com a Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Classes de problemas resolvidos.

Problema	n^f	n^m	FASES DE MATERIAL			
			Vazio	Sólido 1	Sólido 2	Sólido 3
SMT0	2	1	○	●		
MMTO2	3	2	○	●	●	
MMTO3	4	3	○	●	●	●

4.3 Formulação dos problemas discretos

A partir de um conjunto de n^m materiais predefinidos com propriedades relevantes conhecidas, pretende-se determinar a fase de material (sólido ou vazio) para cada ponto do domínio de projecto, neste caso para cada elemento finito, de tal forma que uma dada função objectivo é minimizada.

Nesse sentido começa-se por introduzir uma variável de natureza discreta que controla a selecção de uma dada fase de material sólido, m , em cada elemento finito, e ,

$$\hat{x}_{e,m} = \begin{cases} 1 & , \text{ se o material } m \text{ for seleccionado no elemento } e \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (4.1)$$

Como se assume um igual número de materiais sólidos disponíveis para todos os elementos finitos, o número total de variáveis de projecto é simplesmente $n^v = n^e n^m$.

Em problemas MMS e MMTO, se não for imposta qualquer restrição, nada impede que seja seleccionado mais do que um material sólido num dado elemento e , o que resultaria num material fictício nesse elemento que não faz parte do conjunto inicial de materiais predefinidos. Nesse sentido, Hvejsel & Lund [48] e Hvejsel et al. [49] sugerem a introdução de um constrangimento linear por elemento, g_e^{mat} . Em MMTO, como é o caso dos problemas resolvidos no âmbito desta dissertação, cada um desses constrangimentos toma a seguinte forma:

$$g_e^{mat}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{m=1}^{n^m} \hat{x}_{e,m} \leq 1 \quad \forall e \quad (4.2)$$

Note-se que este é um constrangimento de desigualdade, de modo a permitir que todas as variáveis de projecto tomem o valor nulo para que seja possível seleccionar a fase de vazio. Se o problema a resolver for MMS, os constrangimentos lineares passam a ser de igualdade:

$$g_e^{mat}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{m=1}^{n^m} \hat{x}_{e,m} = 1 \quad \forall e \quad (4.3)$$

Caso alguma variável de projecto entre no somatório com o valor 1, as restantes variáveis tomam necessariamente o valor 0. Posto isto, dada a natureza discreta das variáveis, a imposição deste tipo de constrangimentos assegura que apenas uma fase de material, m , é seleccionada em cada elemento e .

Com a aplicação desta estratégia em vista, nesta dissertação optou-se pelo DMO 1 para interpolar propriedades de material, o que permitiu tirar partido da sua baixa complexidade e facilidade de implementação, comparativamente a outras leis. Faz-se notar que nas formulações

discretas, o DMO 1 serve apenas como base na construção da lei de interpolação, na medida em que as funções de peso associadas a cada fase são simplesmente as variáveis $\hat{x}_{e,m}$.

Comece-se por formular o problema clássico de minimização da *compliance* com constrangimento de volume (SMTO), g^V , ou massa (quando há materiais sólidos disponíveis com diferentes massas volúmica), g^M , para um número de casos de carga arbitrário. Cada caso de carga tem um valor de energia de deformação global associado, pelo que a contabilização da *compliance* na função objectivo faz-se através de uma soma ponderada dos valores de *compliance* de cada caso de carga. A relevância atribuída a cada caso de carga l depende de uma constante de peso $w_l > 0$, normalizada de tal forma que $\sum_{l=1}^{n^{LC}} w_l = 1$. Na Tabela 4.2 apresentam-se possíveis formulações discretas (D) para os problemas SMTO e MMTO de minimização da *compliance* (C) com constrangimento na quantidade de recursos utilizados.

Tabela 4.2: Formulação dos problemas discretos SMTO e MMTO de minimização da *compliance* com constrangimento na quantidade de recursos utilizados.

C-SMTO (D)	C-MMTO (D)
$\min_{\hat{\mathbf{x}}, \hat{x}_e \in \{0,1\}} \sum_{l=1}^{n^{LC}} w_l \mathbf{u}_l^T \mathbf{K} \mathbf{u}_l$ $\text{s.a.} \quad \begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l \\ g^V(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{e=1}^{n^e} \hat{x}_e \Omega _e - \bar{V} \leq 0 \end{cases}$ <p>em que:</p> $\diamond \quad \begin{cases} \mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n^e} \mathbf{K}_e \quad ; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(E_e(\hat{\mathbf{x}})) \\ E_e(\hat{\mathbf{x}}) = E^{(0)} + \hat{x}_e (E^{(1)} - E^{(0)}) \end{cases}$ <p>$e = 1, \dots, n^e \quad m = 1 = n^m \quad l = 1, \dots, n^{LC}$</p>	$\min_{\hat{\mathbf{x}}, \hat{x}_{e,m} \in \{0,1\}} \sum_{l=1}^{n^{LC}} w_l \mathbf{u}_l^T \mathbf{K} \mathbf{u}_l$ $\text{s.a.} \quad \begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l \\ g^M(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{e=1}^{n^e} \rho_e \Omega _e - \bar{M} \leq 0 \\ g_e^{mat}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{m=1}^{n^m} \hat{x}_{e,m} \leq 1 \end{cases}$ <p>em que:</p> $\diamond \quad \begin{cases} \mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n^e} \mathbf{K}_e \quad ; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(E_e(\hat{\mathbf{x}})) \\ E_e(\hat{\mathbf{x}}) = E^{(0)} + \sum_{m=1}^{n^m} \hat{x}_{e,m} (E^{(m)} - E^{(0)}) \end{cases}$ $\diamond \quad \rho_e = \rho_e(\hat{\mathbf{x}}) = \rho^{(0)} + \sum_{m=1}^{n^m} \hat{x}_{e,m} (\rho^{(m)} - \rho^{(0)})$ <p>$e = 1, \dots, n^e \quad m = 1, \dots, n^m \quad l = 1, \dots, n^{LC}$</p>

Nestas formulações, $\rho^{(m)}$ diz respeito à massa volúmica associada à fase de material m , ρ_e representa a massa volúmica associada ao elemento e , \bar{V} o volume máximo da estrutura e \bar{M} a massa máxima da estrutura.

Nesta dissertação, tem-se como objectivo o projecto de estruturas reticuladas através da resolução de problemas de minimização da massa, M , com constrangimentos de tensão. Para assegurar que o projecto é admissível do ponto de vista das tensões independentemente do caso de carga é necessário formular um constrangimento de tensão por cada caso de carga em cada elemento. Como se assumem materiais com igual tensão admissível de tracção e compressão os constrangimentos, $g_{e,l}^\sigma$, são formulados utilizando o quadrado da tensão, para fazer face à eventual mudança de sinal do valor de tensão lido nos elementos de barra durante a optimização. Nos problemas MMTO, onde existem vários materiais sólidos à disposição, há que ter atenção o facto de cada um deles ter um valor de tensão admissível associado. Deste modo, à semelhança do que se faz para a interpolação da massa volúmica ρ_e ou do módulo de Young E_e , o valor de tensão admissível em cada elemento $\bar{\sigma}_e$ é obtido com base na mesma lei de interpolação de material. Os problemas discretos (D) SMTO e MMTO de minimização da massa com constrangimentos de tensão (T) podem ser formulados de acordo com a Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Formulação dos problemas discretos SMTO e MMTO de minimização da massa com constrangimentos de tensão.

T-SMTO (D)	T-MMTO (D)
$\min_{\hat{\mathbf{x}}, \hat{x}_e \in \{0,1\}} M(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{e=1}^{n^e} \rho_e \Omega _e$ $\text{s.a.} \quad \begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l \\ g_{e,l}^\sigma(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}_l(\hat{\mathbf{x}})) = \left(\frac{\sigma_{e,l}}{\bar{\sigma}_e} \right)^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$	$\min_{\hat{\mathbf{x}}, \hat{x}_{e,m} \in \{0,1\}} M(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{e=1}^{n^e} \rho_e \Omega _e$ $\text{s.a.} \quad \begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l \\ g_{e,l}^\sigma(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}_l(\hat{\mathbf{x}})) = \left(\frac{\sigma_{e,l}}{\bar{\sigma}_e} \right)^2 - 1 \leq 0 \\ g_e^{mat}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{m=1}^{n^m} \hat{x}_{e,m} \leq 1 \end{cases}$
em que:	em que:
$\diamond \quad \rho_e = \rho_e(\hat{\mathbf{x}}) = \rho^{(0)} + \hat{x}_e (\rho^{(1)} - \rho^{(0)})$ $\diamond \quad \begin{cases} \mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n^e} \mathbf{K}_e \quad ; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(E_e(\hat{\mathbf{x}})) \\ E_e(\hat{\mathbf{x}}) = E^{(0)} + \hat{x}_e (E^{(1)} - E^{(0)}) \end{cases}$ $\diamond \quad \bar{\sigma}_e = \bar{\sigma}_e(\hat{\mathbf{x}}) = \bar{\sigma}^{(0)} + \hat{x}_e (\bar{\sigma}^{(1)} - \bar{\sigma}^{(0)})$	$\diamond \quad \rho_e = \rho_e(\hat{\mathbf{x}}) = \rho^{(0)} + \sum_{m=1}^{n^m} \hat{x}_{e,m} (\rho^{(m)} - \rho^{(0)})$ $\diamond \quad \begin{cases} \mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n^e} \mathbf{K}_e \quad ; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(E_e(\hat{\mathbf{x}})) \\ E_e(\hat{\mathbf{x}}) = E^{(0)} + \sum_{m=1}^{n^m} \hat{x}_{e,m} (E^{(m)} - E^{(0)}) \end{cases}$ $\diamond \quad \bar{\sigma}_e = \bar{\sigma}_e(\hat{\mathbf{x}}) = \bar{\sigma}^{(0)} + \sum_{m=1}^{n^m} \hat{x}_{e,m} (\bar{\sigma}^{(m)} - \bar{\sigma}^{(0)})$
$e = 1, \dots, n^e \quad m = 1 = n^m \quad l = 1, \dots, n^{LC}$	$e = 1, \dots, n^e \quad m = 1, \dots, n^m \quad l = 1, \dots, n^{LC}$

Na Tabela 4.4 sintetiza-se o número de variáveis de projecto e constrangimentos associados a cada um dos problemas anteriormente apresentados. Como se pode observar os problemas que envolvem constrangimentos de tensão têm uma complexidade acrescida, não só pelo facto de existir um maior número de constrangimentos, mas também por todas as dificuldades inerentes a este tipo de constrangimentos.

Tabela 4.4: Número de variáveis de projecto e constrangimentos dos problemas discretos.

PROBLEMA	C-SMTO (D)	C-MMTO (D)	T-SMTO (D)	T-MMTO (D)
nº de variáveis de projecto , n^v	n^e	$n^e n^m$	n^e	$n^e n^m$
nº de constrangimentos , n^c	1	$n^e + 1$	$n^e n^{LC}$	$n^e n^{LC} + n^e$

Com estas formulações, ficou clara a natureza discreta dos problemas de optimização topológica, contudo a sua resolução com recurso a um algoritmo baseado no gradiente não é possível. Para aferir se os resultados obtidos na resolução dos problemas contínuos correspondiam a óptimos globais ou, por outras palavras, para atribuir ou não validade à metodologia utilizada, recorreu-se ao algoritmo genético para resolver os problemas discretos de minimização da massa com constrangimentos de tensão. Volta-se a reforçar que tal só foi possível devido ao número de barras dos exemplos numéricos considerados (que não é particularmente elevado), caso contrário o algoritmo genético deixaria de ser uma alternativa atractiva.

No algoritmo genético as propriedades dos materiais são obtidas através de um número inteiro z_s que determina uma posição numa tabela, em que cada posição corresponde a uma fase de material. As variáveis de projecto, neste caso a fase de material em cada elemento, são codificadas num vector cromossoma \mathbf{a} com n^s segmentos, cada um deles com k genes. A cada elemento finito atribui-se um segmento s no cromossoma \mathbf{a} , pelo que $n^s = n^e$. Deste modo, o número total de genes é $n^k = n^s \times k$ e, devido ao facto de cada gene poder ser encarado como um bit (0 ou 1), cada segmento s do vector cromossoma \mathbf{a} é dado por $a_{s,1}, \dots, a_{s,k} \in \mathcal{B}^k$.

Sabendo que k genes permitem codificar as propriedades de 2^k fases de material, o número de genes nos problemas SMTO é 1 e nos problemas MMTO2 e MMTO3 é 2. Para uma visualização mais intuitiva do que acabou de ser dito relativamente aos problemas SMTO, MMTO2 e MMTO3 faz-se referências às Tabelas 4.5, 4.6 e 4.7, e à Figura 4.1, onde se exemplifica com um domínio discretizado em 4 elementos finitos a construção dos cromossomas de cada problema com base nas tabelas apresentadas.

Tabela 4.5: Tabela de propriedades de material a ser lida pelo AG nos problemas SMT0.

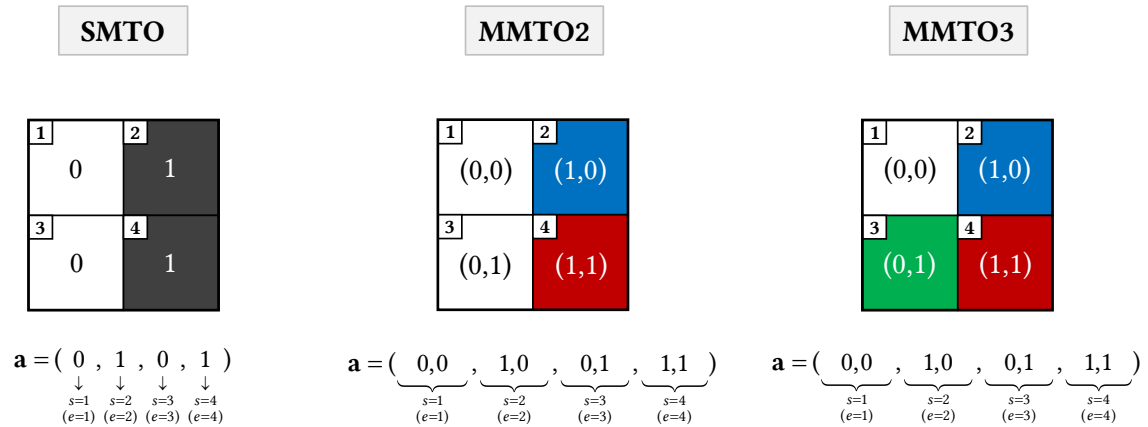
Fase de material	$E^{(m)}$	$\bar{\sigma}^{(m)}$	$\rho^{(m)}$	segmento s
Vazio	$E^{(0)}$	$\bar{\sigma}^{(0)}$	$\rho^{(0)}$	0
Material 1	$E^{(1)}$	$\bar{\sigma}^{(1)}$	$\rho^{(1)}$	1

Tabela 4.6: Tabela de propriedades de material a ser lida pelo AG nos problemas MMT02.

Fase de material	$E^{(m)}$	$\bar{\sigma}^{(m)}$	$\rho^{(m)}$	segmento s
Vazio	$E^{(0)}$	$\bar{\sigma}^{(0)}$	$\rho^{(0)}$	0,0
Vazio	$E^{(0)}$	$\bar{\sigma}^{(0)}$	$\rho^{(0)}$	0,1
Material 1	$E^{(1)}$	$\bar{\sigma}^{(1)}$	$\rho^{(1)}$	1,0
Material 2	$E^{(2)}$	$\bar{\sigma}^{(2)}$	$\rho^{(2)}$	1,1

Tabela 4.7: Tabela de propriedades de material a ser lida pelo AG nos problemas MMT03.

Fase de material	$E^{(m)}$	$\bar{\sigma}^{(m)}$	$\rho^{(m)}$	segmento s
Vazio	$E^{(0)}$	$\bar{\sigma}^{(0)}$	$\rho^{(0)}$	0,0
Material 1	$E^{(1)}$	$\bar{\sigma}^{(1)}$	$\rho^{(1)}$	0,1
Material 2	$E^{(2)}$	$\bar{\sigma}^{(2)}$	$\rho^{(2)}$	1,0
Material 3	$E^{(3)}$	$\bar{\sigma}^{(3)}$	$\rho^{(3)}$	1,1

**Figura 4.1:** Exemplos de cromossomas associados a distribuições de material num domínio discretizado em 4 elementos, considerando problemas SMT0, MMT02 e MMT03.

A decodificação do cromossoma num número inteiro z_s , que representa o número de uma linha nas tabelas de propriedades, faz-se de acordo com a equação (4.4).

$$z_s = 1 + \sum_{j=0}^{k-1} a_{s,(k-j)} \times 2^j, \quad z_s = \Psi^s(a_{s,1}, \dots, a_{s,k}) : \mathcal{B}^k \rightarrow \mathbb{Z}^+ \quad (4.4)$$

Designando por \mathbf{P} a matriz que contém as propriedades das fases em consideração, a obtenção dos valores do módulo de Young, tensão admissível e massa volúmica em cada elemento finito faz-se de acordo com:

$$\begin{cases} E_e = \mathbf{P}_{z_e,1} \\ \bar{\sigma}_e = \mathbf{P}_{z_e,2} \\ \rho_e = \mathbf{P}_{z_e,3} \end{cases} \quad (4.5)$$

A atribuição dos valores à fase de vazio é um aspecto que deve receber especial atenção. Deve-se garantir que $E^{(0)}$ não tem um valor nulo, de modo a evitar matrizes de rigidez singulares e assim ser possível resolver as equações de equilíbrio do sistema. Nesse sentido, deve-se também atribuir a $\bar{\sigma}^{(0)}$ um valor não nulo suficientemente pequeno no contexto do problema. Para além disso, recorde-se que a utilização do AG tem como objectivo atribuir validade à metodologia utilizada na resolução dos problemas contínuos, enunciados na secção 4.4. Para que não se verifiquem matrizes singulares nesses problemas, é imposto um limite inferior às variáveis de projecto, $\underline{x} > 0$. De acordo com a lei de interpolação DMO 1, utilizada na resolução dos problemas contínuos, um dado elemento tem associada a fase de vazio quando todas as suas variáveis de projecto estão no seu limite inferior. Quando isso acontece, note-se que a propriedade resultante nesse elemento (aqui designada de forma genérica por β_e) é superior ao valor da propriedade $\beta^{(0)}$ que se associou à fase de vazio:

$$\begin{aligned} \beta_e(\mathbf{x})|_{x_{e,m}=\underline{x}} &= \beta^{(0)} + \sum_{m=1}^{n^m} \underline{x}^p (\beta^{(m)} - \beta^{(0)}) \quad , \quad \underline{x} > 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta_e(\mathbf{x})|_{x_{e,m}=\underline{x}} &> \beta^{(0)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Deste modo, para que a comparação entre os resultados entre os dois métodos seja justa, o valor a considerar no AG deve ter em consideração este termo adicional.

Um outro aspecto está relacionado com o facto de o algoritmo genético não lidar com constrangimentos directamente. Por forma a contemplar a tensão em cada elemento para cada caso de carga nos problemas resolvidos com este algoritmo, os constrangimentos de tensão, que se

encontram na forma $g_{e,l}^\sigma(\hat{\mathbf{x}}) < 0$, deixam de ser vistos como constrangimentos e passam a fazer parte de um termo de penalidade na função objectivo. No caso do AG, as formulações dos problemas T-SMTO e T-MMTO são idênticas, diferindo apenas no número de genes e noutros parâmetros da optimização que não constam na formulação – equação (4.7).

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{z}} \quad & M(\mathbf{z}) = \sum_{e=1}^{n^e} \rho_e |\Omega|_e + \alpha \left[\sum_{l=1}^{n^{LC}} \sum_{e=1}^{n^e} g_{e,l}^{\sigma'} \right] \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{K}\mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l \end{aligned}$$

em que:

$$\begin{aligned} \diamond \quad & \mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n^e} \mathbf{K}_e \quad ; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(E_e) \\ \diamond \quad & \begin{cases} E_e = \mathbf{P}_{z_e,1} \\ \bar{\sigma}_e = \mathbf{P}_{z_e,2} \\ \rho_e = \mathbf{P}_{z_e,3} \end{cases} \\ \diamond \quad & g_{e,l}^{\sigma'} = g_{e,l}^{\sigma'}(\mathbf{z}) = \begin{cases} g_{e,l}^\sigma(\mathbf{z}) & , \quad \text{se } g_{e,l}^\sigma(\mathbf{z}) = \frac{|\sigma_{e,l}|}{\bar{\sigma}_e} - 1 > 0 \\ 0 & , \quad \text{se } g_{e,l}^\sigma(\mathbf{z}) = \frac{|\sigma_{e,l}|}{\bar{\sigma}_e} - 1 \leq 0 \end{cases} \\ & e = 1, \dots, n^e \quad \quad l = 1, \dots, n^{LC} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Por observação do termo de penalidade da função objectivo conclui-se que sempre que um constrangimento de tensão for violado isso se traduz num agravamento do valor da função objectivo. A constante α é um factor multiplicativo que tem a função de atribuir peso a este termo de penalidade e deve ser afinada consoante o problema que estiver a ser resolvido. Devido ao facto do AG não requerer funções contínuas e diferenciáveis, $g_{e,l}^\sigma$ pode ser definido com o módulo da tensão $\sigma_{e,l}$. Note-se ainda que nesta formulação não é necessário o constrangimento g_e^{mat} , pois o AG não se baseia numa lei de interpolação e faz uma atribuição discreta de materiais a cada elemento, consoante o valor dos respectivos segmentos.

Com todos os problemas discretos devidamente apresentados prossegue-se para a formulação dos problemas relaxados de minimização da massa com constrangimentos, onde se irão detalhar todas as estratégias adoptadas até atingir as formulações finais utilizadas para obter os resultados apresentados nesta dissertação.

4.4 Formulação dos problemas relaxados

Os problemas discretos podem ser relaxados através da substituição das variáveis discretas, $\hat{\mathbf{x}}$ (com $\hat{x}_{e,m} \in \{0,1\}$), por variáveis contínuas, \mathbf{x} (com $x_{e,m} \in [0,1]$). Assim sendo, note-se que o conjunto de soluções admissíveis do problema discreto está contido no conjunto de soluções admissíveis do problema relaxado. Contudo, como já foi referido, para além de se atribuir um valor pouco significativo no contexto do problema a $E^{(0)}$, define-se $x_{e,m} \in]0,1]$ para evitar singularidades nas matrizes de rigidez. Deste modo, obtêm-se funções objectivo e constrangimentos definidos por funções contínuas e diferenciáveis, o que torna possível a utilização de algoritmos baseados no gradiente para resolver os problemas.

4.4.1 Formulação dos problemas originais

Não sendo esse o objectivo principal desta dissertação, relativamente aos problemas de minimização da *compliance* com constrangimento na quantidade de material utilizado, refere-se apenas que a reformulação dos problemas discretos C-SMTO (D) e C-MMTO (D) em problemas relaxados C-SMTO (R) e C-MMTO (R) dá origem a problemas de optimização convexos, tal como demonstrado por Stolpe & Stegmann [92] em problemas multimaterial. Posto isto, uma solução que satisfaça as condições de optimalidade para mínimo local é garantidamente um mínimo global. Nos problemas que envolvem a função tensão, dada a sua não linearidade, já não existe esta garantia, pelo que nesses casos a existência de mínimos locais é um problema sério, uma vez que isso dificulta o algoritmo em alcançar o óptimo global.

Comece-se por reformular os problemas T-SMTO (D) e T-MMTO (D) nos problemas relaxados T-SMTO (R) e T-MMTO (R), respectivamente – Tabela 4.8.

Tabela 4.8: Formulação dos problemas relaxados SMTO e MMTO de minimização da massa com constrangimentos de tensão.

T-SMTO (R)	T-MMTO (R)
$\min_{\mathbf{x}, x_{e,l} \in]0,1]} M(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n^e} \rho_e \Omega _e$ $\text{s.a.} \quad \begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l \\ g_{e,l}^\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u}_l(\mathbf{x})) = \left(\frac{\sigma_{e,l}}{\bar{\sigma}_e} \right)^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$	$\min_{\mathbf{x}, x_{e,m} \in]0,1]} M(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n^e} \rho_e \Omega _e$ $\text{s.a.} \quad \begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l \\ g_{e,l}^\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u}_l(\mathbf{x})) = \left(\frac{\sigma_{e,l}}{\bar{\sigma}_e} \right)^2 - 1 \leq 0 \\ g_e^{\text{mat}}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{n^m} x_{e,m} \leq 1 + (n^m - 1)\underline{x} \end{cases}$

em que:

$$\begin{aligned} \diamond \quad & \rho_e = \rho_e(\mathbf{x}) = \rho^{(0)} + x_e^{p_1} (\rho^{(1)} - \rho^{(0)}) \\ \diamond \quad & \begin{cases} \mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n^e} \mathbf{K}_e & ; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(E_e(\mathbf{x})) \\ E_e(\mathbf{x}) = E^{(0)} + x_e^{p_2} (E^{(1)} - E^{(0)}) \end{cases} \\ \diamond \quad & \bar{\sigma}_e = \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}) = \bar{\sigma}^{(0)} + x_e^{p_3} (\bar{\sigma}^{(1)} - \bar{\sigma}^{(0)}) \end{aligned}$$

$$e = 1, \dots, n^e \quad m = 1, \dots, n^m \quad l = 1, \dots, n^{LC}$$

em que:

$$\begin{aligned} \diamond \quad & \rho_e = \rho_e(\mathbf{x}) = \rho^{(0)} + \sum_{m=1}^{n^m} x_{e,m}^{p_1} (\rho^{(m)} - \rho^{(0)}) \\ \diamond \quad & \begin{cases} \mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n^e} \mathbf{K}_e & ; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(E_e(\mathbf{x})) \\ E_e(\mathbf{x}) = E^{(0)} + \sum_{m=1}^{n^m} x_{e,m}^{p_2} (E^{(m)} - E^{(0)}) \end{cases} \\ \diamond \quad & \bar{\sigma}_e = \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}) = \bar{\sigma}^{(0)} + \sum_{m=1}^{n^m} x_{e,m}^{p_3} (\bar{\sigma}^{(m)} - \bar{\sigma}^{(0)}) \end{aligned}$$

$$e = 1, \dots, n^e \quad m = 1, \dots, n^m \quad l = 1, \dots, n^{LC}$$

Note-se que agora a lei de interpolação de material é o DMO 1 na sua forma original, na medida em que cada função de peso é constituída por uma variável de densidade artificial elevada a um expoente, tal como no modelo SIMP. Veja-se também que, num elemento, a massa volúmica ρ_e , o módulo de Young E_e e a tensão admissível $\bar{\sigma}_e$ são interpolados considerando diferentes expoentes de penalização p_1 , p_2 e p_3 , respectivamente. Este aspecto será detalhado na secção 4.4.3.

Com os problemas contínuos formulados, é possível visualizar graficamente o efeito que o constrangimento g_e^{mat} produz na superfície de interpolação. A título de exemplo, considere-se um expoente $p = 3$ e um número de materiais sólidos candidatos $n^m = 2$. Na Figura 4.2 é possível visualizar a superfície de interpolação para uma propriedade β_e arbitrária.

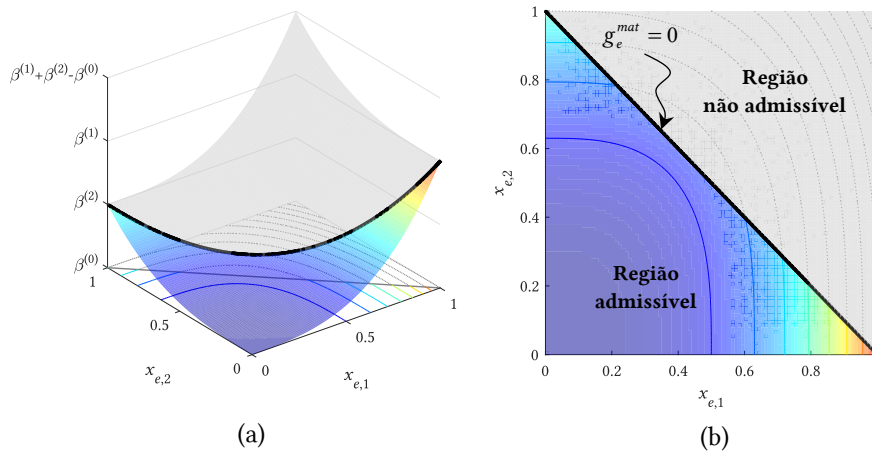


Figura 4.2: Representação gráfica da lei DMO 1 para a interpolação de uma propriedade de material arbitrária num elemento, considerando $p = 3$ e $n^m = 2$. (a) Visualização a 3D. (b) Visualização a 2D.

Como se pode observar, o constrangimento restringe cada superfície de interpolação a uma metade onde a propriedade resultante β_e é efectivamente uma interpolação das propriedades dos vários materiais disponíveis e não uma extrapolação, como seria possível na outra metade da superfície. Se $n^m > 2$ o número de variáveis de projecto por elemento aumenta e as superfícies de interpolação passam a ser hipersuperfícies, deixando de ser possível obter uma visualização gráfica. Apesar disso, o efeito provocado pelo constrangimento é o mesmo, uma vez que exclui soluções associadas a materiais fictícios.

4.4.2 Eliminação de densidades intermédias

Pretende-se garantir que a solução óptima está associada a exactamente um dos materiais candidatos (ou vazio) em cada elemento. Embora o problema esteja a ser resolvido com base numa formulação contínua, as soluções obtidas devem ser discretas. Em problemas de minimização da massa, a convergência para soluções com valores de densidade intermédios é inevitável se não for adoptada nenhuma medida. Tal acontece porque o valor da função objectivo (massa) é mais baixo quando as variáveis de projecto tomam valores menores que 1. Nessas circunstâncias é de esperar que a distribuição de tensões obtida se caracterize pelo facto da tensão em todos os elementos onde existe material ser igual à respectiva tensão admissível, ou seja, todos os constrangimentos de tensão dos elementos com material estão activos e a solução obtida corresponde a um *Fully Stress Design*. Para eliminar valores intermédios de densidade introduz-se um constrangimento g^ε , que consiste num somatório de termos quadráticos, ψ , normalizado e controlado por um parâmetro ε :

$$g^\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{\psi - \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\sum_{e=1}^{n^e} \sum_{m=1}^{n^m} [(\bar{x} - x_{e,m})(x_{e,m} - \underline{x})] - \varepsilon}{\varepsilon} \leq 0, \quad \varepsilon \in]0, +\infty[\quad (4.8)$$

Cada um dos termos do somatório actua como um termo de penalidade, agravando o valor do constrangimento quanto mais intermédio for o valor da variável de projecto $x_{e,m}$. A tolerância relativamente aos valores intermédios é ajustada com base no parâmetro ε , sendo que $\varepsilon = 0$ corresponde à ausência de tolerância e, nessa situação, o conjunto de soluções admissíveis é idêntico ao do problema discreto (D). Contudo, deve-se considerar um valor mínimo para ε , $\varepsilon_{\min} > 0$, para facilitar a satisfação do constrangimento e assim melhorar a convergência do algoritmo. Note-se também que, estando ε no denominador, nunca poderia tomar o valor 0. Quando ε é suficientemente elevado, i.e. quando ε é igual ou superior ao valor máximo de

ψ , ψ_{\max} , o conjunto de soluções admissíveis do problema (RP) é idêntico ao do problema (R), sendo possível calcular ψ_{\max} para cada problema,

$$\psi_{\max} = n^e \left[\left(\bar{x} - \frac{\bar{x} - \underline{x}}{2} \right) \left(\frac{\bar{x} - \underline{x}}{2} - \underline{x} \right) \right] \approx n^e [(\bar{x} - 0.5)(0.5 - \underline{x})] \quad (4.9)$$

Assim, caso se pretenda considerar o constrangimento g^ε inactivo em alguma fase da optimização, basta definir $\varepsilon = \zeta \psi_{\max}$, com $\zeta > 1$ nessas iterações.

Os problemas relaxados (R) podem então ser reformulados em problemas relaxados com penalização (RP), estipulando-se estas como as formulações finais dos problemas – Tabela 4.9.

Tabela 4.9: Formulação dos problemas relaxados com penalização SMTO e MMTO de minimização da massa com constrangimentos de tensão.

T-SMTO (RP)	T-MMTO (RP)
$\min_{\mathbf{x}, x_{e,m} \in]0,1]} M(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n^e} \rho_e \Omega _e$ $\text{s.a.} \quad \begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l \\ g_{e,l}^\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u}_l(\mathbf{x})) = \left(\frac{\sigma_{e,l}}{\bar{\sigma}_e} \right)^2 - 1 \leq 0 \\ g^\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{\psi - \varepsilon}{\varepsilon} \leq 0 \quad , \quad \varepsilon \in]0, +\infty[\end{cases}$	$\min_{\mathbf{x}, x_{e,m} \in]0,1]} M(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n^e} \rho_e \Omega _e$ $\text{s.a.} \quad \begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l \\ g_{e,l}^\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u}_l(\mathbf{x})) = \left(\frac{\sigma_{e,l}}{\bar{\sigma}_e} \right)^2 - 1 \leq 0 \\ g_e^{\text{mat}}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{n^m} x_{e,m} \leq 1 + (n^m - 1) \underline{x} \\ g^\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{\psi - \varepsilon}{\varepsilon} \leq 0 \quad , \quad \varepsilon \in]0, +\infty[\end{cases}$
em que:	em que:
$\diamond \quad \rho_e = \rho_e(\mathbf{x}) = \rho^{(0)} + x_e^{p_1} (\rho^{(1)} - \rho^{(0)})$ $\diamond \quad \begin{cases} \mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n^e} \mathbf{K}_e \quad ; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(E_e(\mathbf{x})) \\ E_e(\mathbf{x}) = E^{(0)} + x_e^{p_2} (E^{(1)} - E^{(0)}) \end{cases}$ $\diamond \quad \bar{\sigma}_e = \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}) = \bar{\sigma}^{(0)} + x_e^{p_3} (\bar{\sigma}^{(1)} - \bar{\sigma}^{(0)})$ $\diamond \quad \psi = \psi(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n^e} \sum_{m=1}^{n^m} [(\bar{x} - x_{e,m})(x_{e,m} - \underline{x})]$	$\diamond \quad \rho_e = \rho_e(\mathbf{x}) = \rho^{(0)} + \sum_{m=1}^{n^m} x_{e,m}^{p_1} (\rho^{(m)} - \rho^{(0)})$ $\diamond \quad \begin{cases} \mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n^e} \mathbf{K}_e \quad ; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(E_e(\mathbf{x})) \\ E_e(\mathbf{x}) = E^{(0)} + \sum_{m=1}^{n^m} x_{e,m}^{p_2} (E^{(m)} - E^{(0)}) \end{cases}$ $\diamond \quad \bar{\sigma}_e = \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}) = \bar{\sigma}^{(0)} + \sum_{m=1}^{n^m} x_{e,m}^{p_3} (\bar{\sigma}^{(m)} - \bar{\sigma}^{(0)})$ $\diamond \quad \psi = \psi(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n^e} \sum_{m=1}^{n^m} [(\bar{x} - x_{e,m})(x_{e,m} - \underline{x})]$
$e = 1, \dots, n^e \quad m = 1, \dots, n^m \quad l = 1, \dots, n^{LC}$	$e = 1, \dots, n^e \quad m = 1, \dots, n^m \quad l = 1, \dots, n^{LC}$

O número de variáveis de projecto e constrangimentos presentes em cada um dos problemas relaxados com e sem penalização explícita de densidades intermédias encontra-se resumido na Tabela 4.10.

Tabela 4.10: Número de variáveis de projecto e constrangimentos dos problemas relaxados com e sem penalização de minimização da massa com constrangimentos de tensão.

PROBLEMA	T-SMTO (R)	T-MMTO (R)	T-SMTO (RP)	T-MMTO (RP)
nº de variáveis de projecto, n^v	n^e	$n^e n^m$	$n^e + 1$	$n^e n^m + 1$
nº de constrangimentos, n^c	$n^e n^{LC}$	$n^e n^{LC} + n^e$	$n^e n^{LC} + 1$	$n^e n^{LC} + n^e + 1$

Um outro aspecto a referir tem a ver com a selecção do ponto de partida \mathbf{x}' , existindo duas opções possíveis. A primeira passa por preencher o vector das variáveis de projecto da iteração 0 de tal forma que nenhuma fase de material é favorecida em detrimento de outra, ou seja, todas as variáveis começam com o valor $x'_{e,m} = 1/n^m$. A desvantagem deste ponto de partida tem a ver com o facto de não existir garantia de que é admissível, embora os algoritmos de optimização e o MMA em particular possuam estratégias para regressar à zona admissível do espaço de projecto. A segunda opção consiste em preencher o vector \mathbf{x}' de tal forma que todos elementos fiquem com o material mais resistente na solução inicial. Embora esta última opção assegure a admissibilidade da solução inicial, pode não ser recomendável pelo facto de poder influenciar a trajectória do algoritmo para uma solução óptima local. Assim, nesta dissertação deu-se preferência à opção em que todas as fases de material são tratadas de igual forma.

4.4.3 Estratégia de penalização

Por estratégia de penalização entende-se um conjunto de técnicas utilizado para desfavorecer ou evitar a obtenção de soluções com valores de densidade intermédios. Estas técnicas podem ser enquadradas em técnicas implícitas e em técnicas explícitas. Estas primeiras, como é o caso da utilização de um modelo SIMP nas funções de peso da lei de interpolação, embora desfavoreçam a selecção de valores intermédios de densidade não impossibilitam que isso aconteça, enquanto que as técnicas explícitas, como é o caso do constrangimento g^e , impossibilitam a obtenção de soluções que contenham valores intermédios, uma vez que estas passam a fazer parte da região não admissível do espaço de projecto.

Para fazer face à existência de mínimos locais, ambas as técnicas são aplicadas seguindo uma *continuation approach*, sendo que na penalização implícita os expoentes de penalização aumentam gradualmente em função do número de iterações e na penalização explícita o valor

de ε vai sendo gradualmente reduzido até um valor mínimo. Designando i como uma iteração qualquer do conjunto do número total de iterações, I_{total} , tem-se $i = 0, 1, \dots, n^{iter}$, em que n^{iter} é o número total de iterações.

O intervalo I_{total} é dividido em dois intervalos I_1 e I_2 , de tal modo que no final de I_1 é como se se tivesse alcançado o óptimo dos problemas (R), uma vez que durante este intervalo se considera que o constrangimento g^ε está inactivo ($\varepsilon = \zeta \psi_{max}$, com $\zeta > 1$). Embora a optimização prossiga, o intervalo I_2 pode ser encarado como a resolução dos problemas (RP) utilizando como \mathbf{x}' o óptimo dos problemas (R), pois é durante este intervalo que se reduz linearmente o parâmetro ε até um valor mínimo, ε_{min} , em função do número de iterações.

Durante I_1 faz-se um aumento linear gradual dos expoentes de penalização das leis de interpolação desde um valor inicial até um valor final previamente definidos. Nos exemplos numéricos apresentados nesta dissertação os expoentes de penalização foram os seguintes:

Tabela 4.11: Valores inicial e final dos expoentes de penalização.

Expoente	p_1	p_2	p_3
Valor inicial	1	1.05 a 1.2	1
Valor final	1	4	3.5

O expoente p_1 , que diz respeito à massa volúmica, considera-se constante e igual a 1 durante toda a optimização, pois caso se considerasse $p_1 > 1$ a massa associada a soluções intermédias seria inferior à real e, desta forma, estas soluções não seriam desfavorecidas. Sendo o objectivo associar densidades intermédias a valores de massa elevados, o leitor pode questionar a possibilidade de seleccionar um expoente $p_1 < 1$, contudo isso resultaria numa superfície de interpolação côncava que aumentaria fortemente a probabilidade de o algoritmo convergir para um mínimo local. A mesma justificação aplica-se aos valores iniciais dos restantes expoentes de penalização.

Para interpolar o módulo de Young há que ter em consideração a influência do expoente p_2 que, neste caso, tem de ser superior a 1 para que as soluções intermédias sejam desfavorecidas, pelo facto de ficarem com um valor de rigidez inferior. Após vários testes, chegou-se à conclusão de que $p_2 = 4$ é um bom valor final para este expoente. Como valor inicial estipulou-se um valor entre 1.05 e 1.20, dependendo do problema. A razão pela qual se considera $p_2 > 1$ na iteração 0 é a existência do fenómeno da singularidade dos constrangimentos de tensão. Aqui, o relaxamento dos constrangimentos de tensão faz-se com uma técnica que pode ser encarada

como uma variante do *qp-approach*, uma vez que na interpolação das tensões admissíveis se utiliza um expoente $p_3 < p_2$. Como não se devem seleccionar expoentes iniciais inferiores à unidade pelas razões já apresentadas, a única opção que garante que os constrangimentos estão relaxados desde o início é a selecção de um expoente inicial $p_2 > 1$. Como a não linearidade do problema vai aumentando à medida que os expoentes de penalização aumentam, optou-se por um expoente final $p_3 = 3.5$, o que significa que a diferença $p_2 - p_3$ vai aumentando com o decorrer da optimização e, portanto, o relaxamento dos constrangimentos de tensão vai também aumentando ligeiramente ao longo do problema. Deste modo, dá-se alguma liberdade ao algoritmo para escapar a eventuais mínimos locais. Para uma visualização das superfícies de interpolação das diferentes propriedades com os valores finais de expoente de penalização veja-se a Figura 4.3.

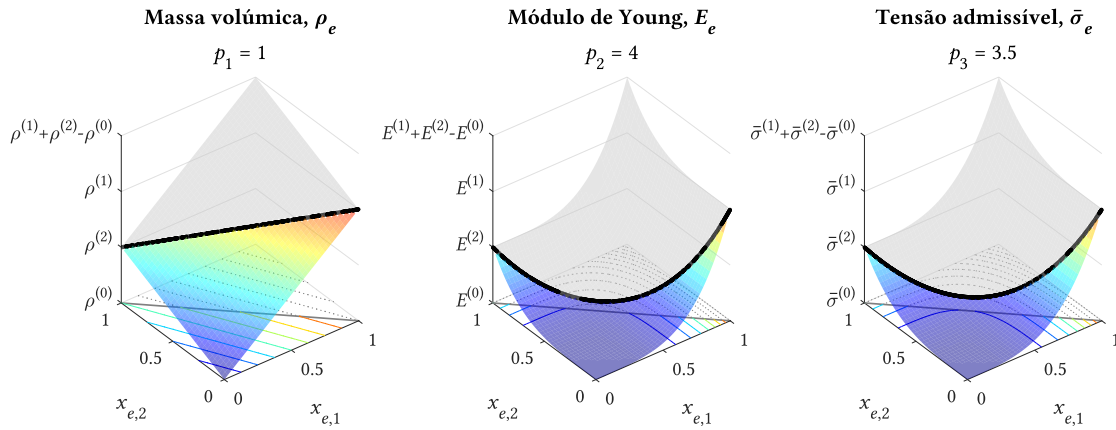


Figura 4.3: Representação gráfica das superfícies de interpolação da massa volúmica, módulo de Young e tensão admissível num elemento, considerando $n^m = 2$ e expoentes de penalização finais.

Embora o intervalo I_1 seja destinado ao aumento gradual dos expoentes de penalização, este aumento só se inicia quando uma percentagem de iterações previamente estipuladas, $\delta_{\%}$, já tiver decorrido. A justificação para este aspecto prende-se unicamente com o facto de dar alguma liberdade ao algoritmo para se ajustar ao problema não penalizado. Tipicamente, $\delta_{\%} \in [0.05; 0.20]$.

No intervalo I_2 os expoentes de penalização são mantidos constantes até ao final da optimização. A activação do constrangimento g^e faz-se através da especificação da iteração $i = i_{start}^e$. Nessa iteração, ε toma o valor de ψ da iteração anterior com uma pequena folga, ou seja, $\varepsilon = \zeta \psi_{\max}$ passa a $\varepsilon = (1 + \delta) \psi|_{i=i_{start}^e - 1}$, tendo-se concluído que $\delta = 0.001$ é suficiente. A redução linear do parâmetro ε até ao seu valor mínimo, ε_{\min} , faz-se até à iteração $i = i_{end}^e$, sendo que

CÁLCULO DE SENSIBILIDADES

5.1 Introdução

A utilização de um algoritmo de optimização baseado no gradiente tem subjacente o cálculo de sensibilidades da função objectivo e dos constrangimentos do problema em ordem a cada uma das variáveis de projecto, por forma a que seja possível progredir na optimização. Quando o cálculo de sensibilidades pela aplicação directa de regras de derivação é impraticável existem duas opções possíveis, ou se opta por um método numérico (como as diferenças finitas) ou se opta por um método analítico (por exemplo, método adjunto ou método da diferenciação directa). Dado o elevado custo computacional e o erro associado ao cálculo de derivadas por métodos numéricos, nesta dissertação todas as sensibilidades são calculadas de forma analítica. No caso da função objectivo, dos constrangimentos para eliminação de materiais fictícios e do constrangimento para eliminação de densidades intermédias os gradientes foram calculados por aplicação directa de regras de derivação, dada a sua baixa complexidade. Os constrangimentos de tensão apresentam uma complexidade superior, pelo facto de dependerem explícita e implicitamente do valor das variáveis de projecto. A dependência implícita provém do facto da tensão ser função do campo de deslocamentos, que é solução das equações de equilíbrio do sistema discretizado. Os deslocamentos dependem das variáveis de projecto por intermédio da lei de interpolação utilizada para obter o módulo de Young em cada elemento de barra. O modelo de interpolação utilizado requer que o número total de variáveis de projecto seja $n^v = n^e n^m$. De maneira a garantir um *design* admissível para vários casos de carga, é necessário impor por elemento um número de constrangimentos igual ao número de casos de carga, pelo que o número total de constrangimentos de tensão é $n^c = n^e n^{LC}$. Nesta dissertação, considerou-se um máximo de 2 casos de carga e um máximo de 3 fases de material sólido. Para além disso, a escalabilidade desta metodologia para um maior número de fases de material conduz a que, muito provavelmente, o número de constrangimentos seja inferior ao número de variáveis de projecto, $n^c < n^v$, o que faz com que o método adjunto seja preferível para o cálculo de sensibilidades. Posto isto, as sensibilidades dos constrangimentos de tensão são demonstradas com um elemento de barra arbitrário.

5.2 Função objectivo

A função objectivo é a massa da estrutura, e esta é dada pelo somatório da massa avaliada em cada elemento finito,

$$M(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n^e} \left[\left(\rho^{(0)} + \sum_{m=1}^{n^m} x_{e,m} p_1 \left(\rho^{(m)} - \rho^{(0)} \right) \right) |\Omega|_e \right] \quad (5.1)$$

Tratando-se de elementos de barra, o volume de cada elemento finito é simplesmente $|\Omega|_e = A_e L_e$, em que A_e e L_e são a área e o comprimento do elemento e , respectivamente.

Dada a baixa complexidade da lei de interpolação, o gradiente da função objectivo pode ser calculado por aplicação directa de regras de derivação, obtendo-se,

$$\frac{\partial M}{\partial x_{e,m}} = p_1 x_{e,m}^{p_1-1} \left(\rho^{(m)} - \rho^{(0)} \right) |\Omega|_e, \quad \begin{cases} e = 1, \dots, n^e \\ m = 1, \dots, n^m \end{cases} \quad (5.2)$$

O fornecimento das derivadas ao MMA é feito através de um vector coluna de dimensão $n^v \times 1$ (ou $n^e n^m \times 1$), que pode ser preenchido de acordo com o seguinte pseudo-código,

▷ **Inicialização e/ou descrição das variáveis:**

$[\partial M / \partial \mathbf{x}]$ = vector gradiente da função objectivo

$[\mathbf{x}]$ = vector das variáveis de projecto

$[\rho]$ = vector de dimensão $n^f \times 1$ com as massas volúmicas de cada fase de material (end corresponde à última entrada desse vector, onde se encontra a fase de vazio)

▷ **Preenchimento do vector gradiente:**

for $e = 1$ até n^e

for $m = 1$ até n^m

$$\left[\frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}} \right]_{(e-1)n^m+m} = A_e L_e p_1 [\mathbf{x}]_{((e-1)n^m+m)^{p_1-1}} \left([\rho]_m - [\rho]_{\text{end}} \right)$$

end

end

5.3 Constrangimentos de tensão

De maneira a garantir um projecto rigoroso e admissível do ponto de vista das tensões, os constrangimentos de tensão são aplicados localmente (em cada elemento) e para cada caso de carga da seguinte forma,

$$g_{e,l}^{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_l(\mathbf{x})) = \left(\frac{\sigma_{e,l}}{\bar{\sigma}_e} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad , \quad \begin{cases} e = 1, \dots, n^e \\ l = 1, \dots, n^{LC} \end{cases} \quad (5.3)$$

O cálculo das sensibilidades dos constrangimentos da equação (5.3) pela via manual é impraticável, devido à dependência implícita da tensão em ordem às variáveis de projecto por intermédio do campo de deslocamentos. Uma vez que o número de variáveis de projecto é superior ao número de constrangimentos de tensão, utiliza-se o método adjunto para calcular as sensibilidades totais,

$$\frac{dg_{e,l}^{\sigma}}{dx_{e,m}} = \frac{\partial g_{e,l}^{\sigma}}{\partial x_{e,m}} + \boldsymbol{\lambda}_{e,l}^T \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_{e,m}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_{e,m}} \mathbf{u}_l \right] \quad , \quad \begin{cases} e = 1, \dots, n^e \\ m = 1, \dots, n^m \\ l = 1, \dots, n^{LC} \end{cases} \quad (5.4)$$

Uma vez que não existe dependência dos carregamentos exteriormente aplicados em ordem às variáveis de projecto a equação (5.4) reduz-se a,

$$\frac{dg_{e,l}^{\sigma}}{dx_{e,m}} = \frac{\partial g_{e,l}^{\sigma}}{\partial x_{e,m}} - \boldsymbol{\lambda}_{e,l}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_{e,m}} \mathbf{u}_l \quad (5.5)$$

O cálculo dos vectores adjuntos $\boldsymbol{\lambda}_{e,l}$ requer que seja resolvido um problema adjunto por cada constrangimento,

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda}_{e,l} = \mathbf{z}_{e,l} \quad , \quad \mathbf{z}_{e,l} = \left(\frac{\partial g_{e,l}^{\sigma}}{\partial \mathbf{u}_l} \right)^T \quad (5.6)$$

Para resolver cada um destes problemas é necessário determinar os vectores de carga fictícia $\mathbf{z}_{e,l}$, que consistem na derivada explícita dos constrangimentos de tensão em ordem aos deslocamentos do sistema global.

Comece-se por considerar um elemento de barra arbitrário com os nós I e II, tal como se representa na Figura 5.1,

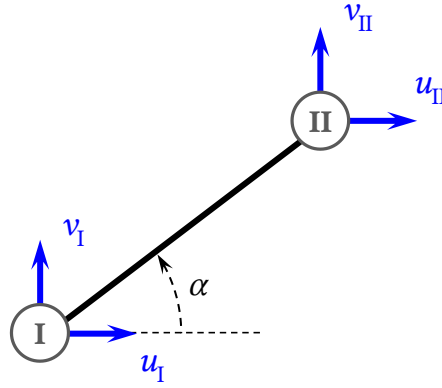


Figura 5.1: Elemento de barra arbitrário.

em que α é o ângulo de transformação de coordenadas e os graus de liberdade do elemento em coordenadas globais são u_I, v_I, u_{II} e v_{II} .

Uma vez resolvidas as equações de equilíbrio do sistema, os esforços internos (axiais) nos nós do elemento de barra em coordenadas locais são calculados de acordo com a equação (5.7). Veja-se a dependência nas variáveis de projecto \mathbf{x} , de forma explícita na lei de interpolação do módulo de Young E_e e de forma implícita nos deslocamentos \mathbf{u} .

$$\begin{Bmatrix} f_I \\ f_{II} \end{Bmatrix} = \frac{E_e(\mathbf{x})A_e}{L_e} \begin{Bmatrix} u_I(\mathbf{x})\cos\alpha + v_I(\mathbf{x})\sin\alpha - u_{II}(\mathbf{x})\cos\alpha - v_{II}(\mathbf{x})\sin\alpha \\ -u_I(\mathbf{x})\cos\alpha - v_I(\mathbf{x})\sin\alpha + u_{II}(\mathbf{x})\cos\alpha + v_{II}(\mathbf{x})\sin\alpha \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

Dividindo pela área do elemento, obtêm-se as tensões,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \end{Bmatrix} = \frac{E_e(\mathbf{x})}{L_e} \begin{Bmatrix} \cos\alpha(u_I(\mathbf{x}) - u_{II}(\mathbf{x})) + \sin\alpha(v_I(\mathbf{x}) - v_{II}(\mathbf{x})) \\ \cos\alpha(u_{II}(\mathbf{x}) - u_I(\mathbf{x})) + \sin\alpha(v_{II}(\mathbf{x}) - v_I(\mathbf{x})) \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

O valor de tensão utilizado para formular cada constrangimento provém de uma das entradas do vector da equação (5.8). Contudo, relembra-se o facto de os constrangimentos estarem formulados considerando o quadrado da tensão, pelo que é indiferente o nó em que é lido o seu valor. Reescrevendo a equação (5.3) omitindo a dependência relativamente às variáveis de projecto,

$$g_{e,l}^{\sigma} = \frac{E_e^2}{\bar{\sigma}_e^2 L_e^2} \left(\cos \alpha (u_I - u_{II}) + \sin \alpha (v_I - v_{II}) \right)^2 - 1 \leq 0 \quad (5.9)$$

Atente-se no facto do vector de carga fictícia em (5.6) apenas poder ter entradas não nulas associadas aos graus de liberdade dos nós do elemento em questão. Derivando a equação (5.9) em ordem aos deslocamentos tem-se,

$$\frac{\partial g_{e,l}^{\sigma}}{\partial u_I} = \frac{E_e^2}{\bar{\sigma}_e^2 L_e^2} \left[2 \cos \alpha \left(\cos \alpha (u_I - u_{II}) + \sin \alpha (v_I - v_{II}) \right) \right] \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial g_{e,l}^{\sigma}}{\partial v_I} = \frac{E_e^2}{\bar{\sigma}_e^2 L_e^2} \left[2 \sin \alpha \left(\cos \alpha (u_I - u_{II}) + \sin \alpha (v_I - v_{II}) \right) \right] \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial g_{e,l}^{\sigma}}{\partial u_{II}} = \frac{E_e^2}{\bar{\sigma}_e^2 L_e^2} \left[2 \cos \alpha \left(\cos \alpha (u_{II} - u_I) + \sin \alpha (v_{II} - v_I) \right) \right] \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial g_{e,l}^{\sigma}}{\partial v_{II}} = \frac{E_e^2}{\bar{\sigma}_e^2 L_e^2} \left[2 \sin \alpha \left(\cos \alpha (u_{II} - u_I) + \sin \alpha (v_{II} - v_I) \right) \right] \quad (5.13)$$

Um pormenor a ter em conta tem a ver com os graus de liberdade fixos, pois quaisquer que sejam as entradas que os representam no vector de carga fictícia, estas não se consideram na resolução do sistema de equações. Neste ponto é possível perceber que cada um dos problemas adjuntos consiste na determinação de um campo de deslocamentos (representado pelo vector adjunto) resultante da aplicação de duas cargas fictícias alinhadas com o elemento em questão, tal como se pretende ilustrar com a estrutura da Figura 5.2.

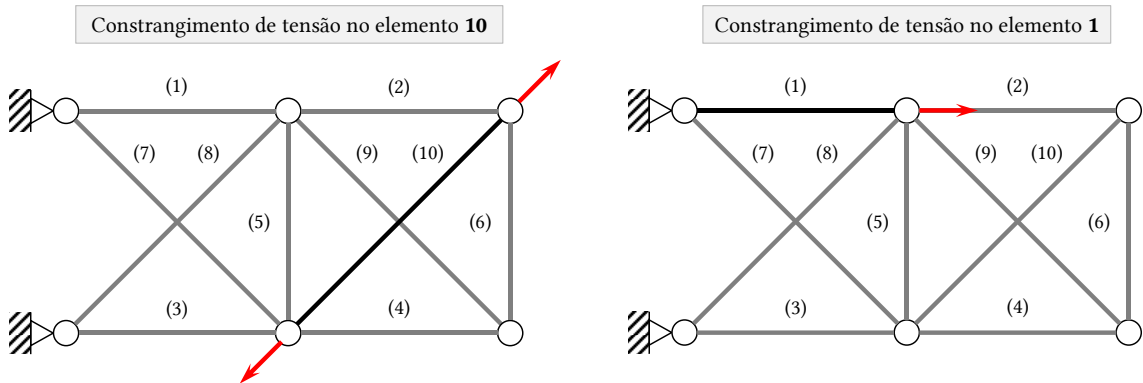


Figura 5.2: Exemplos de vectores de carga fictícia numa treliça de 10 barras com constrangimentos de tensão.

O preenchimento dos vectores de carga fictícia pode ser feito de acordo com o seguinte pseudo-código,

▷ **Inicialização e/ou descrição das variáveis:**

- $[z]$ = array de dimensão $n^{GDL} \times n^e \times n^{LC}$
- $[freedofs]$ = vector cujas entradas são os graus de liberdade livres
- $[e_dofs]$ = matriz de dimensão $n^e \times 4$ que contém por cada linha o número dos graus de liberdade associados ao respectivo elemento
- idx é uma variável que resulta da comparação entre cada um dos graus de liberdade do elemento com os graus de liberdade livres. Caso exista correspondência, idx toma o valor da posição do grau de liberdade no vector $[e_dofs]_{e,*}$. Se não existir correspondência entre os graus de liberdade, idx toma o valor nulo, pelo que $idx = \{0,1,2,3,4\}$

▷ **Preenchimento dos vectores de carga fictícia:**

for $e = 1$ até n^e

for $l = 1$ até n^{LC}

for $i = 1$ até $\text{length}([freedofs])$

$idx = \text{find}([e_dofs]_{e,*} = [freedofs]_i)$

if $idx = 1$

$$[z]_{e_dofs_{e,idx},l,e} = \frac{\partial g_{e,l}^\sigma}{\partial u_I} \rightarrow \text{equação (5.10)}$$

elseif $idx = 2$

$$[z]_{e_dofs_{e,idx},l,e} = \frac{\partial g_{e,l}^\sigma}{\partial v_I} \rightarrow \text{equação (5.11)}$$

elseif $idx = 3$

$$[z]_{e_dofs_{e,idx},l,e} = \frac{\partial g_{e,l}^\sigma}{\partial u_{II}} \rightarrow \text{equação (5.12)}$$

elseif $idx = 4$

$$[z]_{e_dofs_{e,idx},l,e} = \frac{\partial g_{e,l}^\sigma}{\partial v_{II}} \rightarrow \text{equação (5.13)}$$

end

end

end

end

*O símbolo * representa a selecção de todas as entradas nessa dimensão.*

Para que o cálculo da parte implícita das sensibilidades fique concluído resta apenas determinar na equação (5.5) a derivada da matriz de rigidez global \mathbf{K} em ordem às variáveis de projecto \mathbf{x} , pois o campo de deslocamentos \mathbf{u} provém directamente da análise de elementos finitos. Deste modo, $\partial\mathbf{K}/\partial\mathbf{x}_{e,m}$ é facilmente obtido através da assemblagem das matrizes de rigidez locais, mas onde a lei de interpolação para o módulo de Young E_e está na sua forma de derivada,

$$\frac{\partial\mathbf{K}_e^{local}}{\partial\mathbf{x}_{e,m}} = \left(\frac{\partial E_e}{\partial\mathbf{x}_{e,m}} A_e \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial E_e}{\partial\mathbf{x}_{e,m}} = p_2 \mathbf{x}_{e,m}^{p_2-1} (E^{(m)} - E^{(0)}) \quad (5.14)$$

Relativamente à derivada da lei de interpolação, esta segue uma implementação computacional semelhante à derivada da função objectivo, pelo que não se apresenta um pseudo-código. A implementação segue de forma análoga à assemblagem da matriz de rigidez global.

Uma vez calculados todos os termos da parte implícita da derivada total dos constrangimentos, falta obter a parte explícita. Veja-se que as variáveis de projecto estão presentes nos constrangimentos de tensão por intermédio das leis de interpolação do módulo de Young E_e e tensão admissível $\bar{\sigma}_e$. Assim sendo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{e,l}^\sigma}{\partial\mathbf{x}_{e,m}} &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}_{e,m}} \left(\frac{E_e^2}{\bar{\sigma}_e^2 L_e^2} (\cos\alpha(u_I - u_{II}) + \sin\alpha(v_I - v_{II}))^2 - 1 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}_{e,m}} \left(\left(\frac{E_e}{\bar{\sigma}_e} \right)^2 \underbrace{\left(\frac{(\cos\alpha(u_I - u_{II}) + \sin\alpha(v_I - v_{II}))^2}{L_e^2} \right)}_{cte} - 1 \right) \\ &= 2 \left(\frac{E_e}{\bar{\sigma}_e} \right) \left(\frac{\frac{\partial E_e}{\partial\mathbf{x}_{e,m}} \bar{\sigma}_e - E_e \frac{\partial \bar{\sigma}_e}{\partial\mathbf{x}_{e,m}}}{\bar{\sigma}_e^2} \right) cte \end{aligned} \quad (5.15)$$

em que,

$$\frac{\partial E_e}{\partial\mathbf{x}_{e,m}} = p_2 \mathbf{x}_{e,m}^{p_2-1} (E^{(m)} - E^{(0)}) \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_e}{\partial\mathbf{x}_{e,m}} = p_3 \mathbf{x}_{e,m}^{p_3-1} (\bar{\sigma}^{(m)} - \bar{\sigma}^{(0)}) \quad (5.17)$$

Com todos os termos da equação (5.5) calculados é necessário fornecê-los ao algoritmo de optimização correctamente. No caso do MMA, os gradientes dos constrangimentos são fornecidos nas linhas de uma matriz de dimensão $n^e \times n^v$ (ou $n^e n^{LC} \times n^e n^m$). As linhas dessa matriz que dizem respeito aos constrangimentos de tensão são dadas por,

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dg_{1,1}^\sigma}{dx_{1,1}} & \frac{dg_{1,1}^\sigma}{dx_{1,2}} & \dots & \frac{dg_{1,1}^\sigma}{dx_{1,n^m}} \\ \frac{dg_{2,1}^\sigma}{dx_{1,1}} & \frac{dg_{2,1}^\sigma}{dx_{1,2}} & \dots & \frac{dg_{2,1}^\sigma}{dx_{1,n^m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dg_{n^e,1}^\sigma}{dx_{1,1}} & \frac{dg_{n^e,1}^\sigma}{dx_{1,2}} & \dots & \frac{dg_{n^e,1}^\sigma}{dx_{1,n^m}} \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \frac{dg_{1,1}^\sigma}{dx_{n^e,1}} & \frac{dg_{1,1}^\sigma}{dx_{n^e,2}} & \dots & \frac{dg_{1,1}^\sigma}{dx_{n^e,n^m}} \\ \frac{dg_{2,1}^\sigma}{dx_{n^e,1}} & \frac{dg_{2,1}^\sigma}{dx_{n^e,2}} & \dots & \frac{dg_{2,1}^\sigma}{dx_{n^e,n^m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dg_{n^e,1}^\sigma}{dx_{n^e,1}} & \frac{dg_{n^e,1}^\sigma}{dx_{n^e,2}} & \dots & \frac{dg_{n^e,1}^\sigma}{dx_{n^e,n^m}} \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} \frac{dg_{1,n^{LC}}^\sigma}{dx_{1,1}} & \frac{dg_{1,n^{LC}}^\sigma}{dx_{1,2}} & \dots & \frac{dg_{1,n^{LC}}^\sigma}{dx_{1,n^m}} \\ \frac{dg_{2,n^{LC}}^\sigma}{dx_{1,1}} & \frac{dg_{2,n^{LC}}^\sigma}{dx_{1,2}} & \dots & \frac{dg_{2,n^{LC}}^\sigma}{dx_{1,n^m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dg_{n^e,n^{LC}}^\sigma}{dx_{1,1}} & \frac{dg_{n^e,n^{LC}}^\sigma}{dx_{1,2}} & \dots & \frac{dg_{n^e,n^{LC}}^\sigma}{dx_{1,n^m}} \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \frac{dg_{1,n^{LC}}^\sigma}{dx_{n^e,1}} & \frac{dg_{1,n^{LC}}^\sigma}{dx_{n^e,2}} & \dots & \frac{dg_{1,n^{LC}}^\sigma}{dx_{n^e,n^m}} \\ \frac{dg_{2,n^{LC}}^\sigma}{dx_{n^e,1}} & \frac{dg_{2,n^{LC}}^\sigma}{dx_{n^e,2}} & \dots & \frac{dg_{2,n^{LC}}^\sigma}{dx_{n^e,n^m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dg_{n^e,n^{LC}}^\sigma}{dx_{n^e,1}} & \frac{dg_{n^e,n^{LC}}^\sigma}{dx_{n^e,2}} & \dots & \frac{dg_{n^e,n^{LC}}^\sigma}{dx_{n^e,n^m}} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Faz-se notar que um constrangimento só apresenta derivada explícita relativamente às variáveis de projecto que dizem respeito ao elemento finito do constrangimento em questão, uma vez que a derivada explícita provém das leis de interpolação do módulo de Young e tensão admissível, que apenas contêm as variáveis de projecto associadas a esse elemento. Uma implementação computacional da matriz de gradientes pode ser dada por,

▷ **Inicialização e/ou descrição das variáveis:**

$[dg^\sigma/d\mathbf{x}]$ = matriz de dimensão $n^e \times n^v$ (ou $n^e n^{LC} \times n^e n^m$) com os gradientes dos constrangimentos

$[dg^\sigma/\partial\mathbf{x}]$ = array de dimensão $n^e \times n^m \times n^{LC}$ com as derivadas explícitas de cada constrangimento em ordem a cada uma das variáveis de projecto

$[\lambda]$ = array de dimensão $n^{GDL} \times n^{LC} \times n^e$ com os vectores adjuntos de cada constrangimento

$[\partial\mathbf{K}/\partial\mathbf{x}]$ = array de dimensão $n^{GDL} \times n^{GDL} \times n^v$ com as derivadas da matriz de rigidez global em ordem a cada uma das variáveis de projecto

$[\mathbf{u}]$ = matriz de dimensão $n^{GDL} \times n^{LC}$ com o vector de deslocamentos para cada caso de carga

▷ **Preenchimento da matriz dos gradientes dos constrangimentos de tensão:**

```

for  $l = 1$  até  $n^{LC}$ 
  for  $e = 1$  até  $n^e$ 
    for  $c = 1$  até  $n^e$ 
      for  $m = 1$  até  $n^m$ 
        if  $e = c$ 
          
$$\left[ \frac{dg^\sigma}{d\mathbf{x}} \right]_{((l-1)n^e+c),((e-1)n^m+m)} = \left[ \frac{\partial g_\sigma}{\partial \mathbf{x}} \right]_{e,m,l} - [\boldsymbol{\lambda}]_{*,l,c}^T \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{*,*,((e-1)n^m+m)} [\mathbf{u}]_{*,l}$$

        else
          
$$\left[ \frac{dg^\sigma}{d\mathbf{x}} \right]_{((l-1)n^e+c),((e-1)n^m+m)} = -[\boldsymbol{\lambda}]_{*,l,c}^T \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{*,*,((e-1)n^m+m)} [\mathbf{u}]_{*,l}$$

        end
      end
    end
  end
end

```

O símbolo * representa a selecção de todas as entradas nessa dimensão.

5.4 Constrangimentos para eliminação de materiais fictícios

Uma vez que os constrangimentos para eliminação de materiais fictícios são lineares, o cálculo das suas sensibilidades em ordem às variáveis de projecto é trivial,

$$\frac{\partial g_e^{mat}}{\partial x_{e,m}} = \frac{\partial}{\partial x_{e,m}} \left(\sum_{m=1}^{n^m} x_{e,m} - \bar{x} + \underline{x} \right) = 1 \quad (5.19)$$

5.5 Constrangimento g^ε

O constrangimento para eliminação de densidades intermédias é não linear, sendo o resultado de um somatório de termos quadráticos. Derivando em ordem a uma variável de projecto arbitrária tem-se,

$$\frac{\partial g^\varepsilon}{\partial x_{e,m}} = \frac{\partial}{\partial x_{e,m}} \left(\frac{\sum_{e=1}^{n^e} \sum_{m=1}^{n^m} [(\bar{x} - x_{e,m})(x_{e,m} - \underline{x})] - \varepsilon}{\varepsilon} \right) = -\frac{2x_{e,m} + \bar{x} + \underline{x}}{\varepsilon} \quad (5.20)$$

RESULTADOS

Neste capítulo, a metodologia apresentada é testada com 7 exemplos numéricos de estruturas reticuladas, considerando as 3 classes de problemas descritas na secção 4.2 (SMT0, MMTO2 e MMTO3). Os exemplos são apresentados por ordem crescente de complexidade. Os resultados obtidos pelo MMA são comparados com os obtidos pelo AG sempre que possível, de maneira a verificar a viabilidade da metodologia proposta em alcançar soluções discretas de distribuição de material que se crêem ser óptimas (locais ou globais).

Consideram-se até 4 fases de material disponíveis, *i.e.*, até 3 fases de material sólido e 1 de vazio que é sempre considerada. As suas propriedades encontram-se resumidas na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Propriedades das fases de material consideradas na resolução dos problemas de optimização.

Material	Ref.	Cor	Cor RGB	Massa volúmica [kg/m ³]	Módulo de Young [Pa]	Tensão admissível [Pa]
Vazio	—	○	[1 1 1]	0	1×10^4	1×10^6
Aço	[114]	●	[1 0 0]	7850	205×10^9	425×10^6
Alumínio	[8]	●	[0 0 1]	2700	70×10^9	310×10^6
Magnésio	[114]	●	[0 1 0]	1700	44×10^9	220×10^6

Nos problemas SMT0 a fase de material sólido é sempre aço, em MMTO2 acrescenta-se a fase de alumínio e nos problemas MMTO3 adiciona-se o magnésio ao conjunto de materiais disponíveis.

Ao longo deste capítulo, a gama de cores utilizada nos elementos para as distribuições de material apresentadas, têm por detrás a mesma lei de interpolação utilizada nas propriedades de material. Assim, as cores visualizadas correspondem directamente ao valor das variáveis de projecto. Como a função objectivo é dada pela massa, o expoente de penalização utilizado para obter as cores desta representação é igual a p_1 , *i.e.*, $p_1 = 1$. A título de exemplo, a cor de um elemento num problema de MMTO3 é dada por:

$$[R_e \quad G_e \quad B_e] = [1 \quad 1 \quad 1] - x_{e,1}^{p_1} [0 \quad 1 \quad 1] - x_{e,2}^{p_1} [1 \quad 1 \quad 0] - x_{e,3}^{p_1} [1 \quad 0 \quad 1] \quad (6.1)$$

Nos problemas SMTO utiliza-se uma escala de cinzentos, sendo a presença de material representada por preto e a ausência por branco.

6.1 Treliça de 3 barras

Começou-se por testar a metodologia com uma variante da treliça de três barras de Kirsch [52] – Figura 6.1. Dado o carácter académico deste exemplo, reduziu-se a área do elemento 1 por forma a tornar não admissível uma solução óptima global que passaria por remover as barras 2 e 3 e deixar material apenas na barra 1, o que não permitiria mostrar as potencialidades de MMTO face a SMTO com este exemplo.

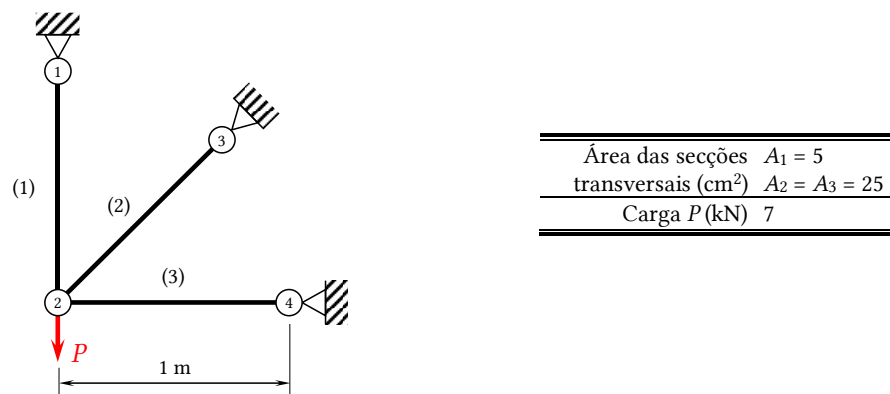


Figura 6.1: Dados da treliça de 3 barras.

A solução óptima global deste problema consiste em remover a barra 1, o que faz com que a estrutura fique com apenas duas barras, tal como se comprovou pelo AG. Assim, apenas se resolveram os problemas SMTO e MMTO2.

No problema SMTO em particular, não foi possível alcançar a solução do AG partindo de um ponto de partida justo, *i.e.*, todos os elementos com o material mais resistente ou todas as variáveis de projecto com o valor 0.5. Como a solução óptima global já era conhecida, $\mathbf{x}' = [0.25 \quad 0.75 \quad 0.50]$ foi o ponto de partida próximo do ponto $\mathbf{x}' = [0.50 \quad 0.50 \quad 0.50]$ que permitiu alcançar o resultado desejado. Sendo este modelo numérico uma variante do modelo utilizado na secção 2.3.3.3 e tendo-se desde logo verificado a influência que o ponto de partida tem na convergência do algoritmo para a solução óptima global, não é surpreendente que tenha

vido necessário alterar o vector \mathbf{x}' . Na Tabela 6.2 apresentam-se as distribuições de material, violação das tensões admissíveis e o valor das funções de peso no óptimo dos dois problemas. Como se pode observar, a transição de SMT0 para MMT02 consistiu apenas da substituição da barra 3, que é de aço no problema SMT0, por uma de alumínio, o que permitiu reduzir a massa da estrutura em 33% – Tabela 6.3. Veja-se pelas figuras da violação das tensões admissíveis que o *design* está agora mais próximo de um FSD.

Como se pode observar pela convergência da função objectivo na Tabela 6.4, à medida que os expoentes de penalização aumentam, o valor da função objectivo vai também aumentando, pois as densidades intermédias vão perdendo a sua eficiência. Na iteração 80 o parâmetro ε começa a diminuir, o que faz com que a massa aumente como resultado das variáveis de projecto se aproximarem do seu valor limite. Este raciocínio é aplicável a todos os problemas seguintes.

Tabela 6.2: Treliza de 3 barras – distribuições de material, distribuições da violação das tensões admissíveis e valor das funções de peso no óptimo dos problemas resolvidos pelo MMA.

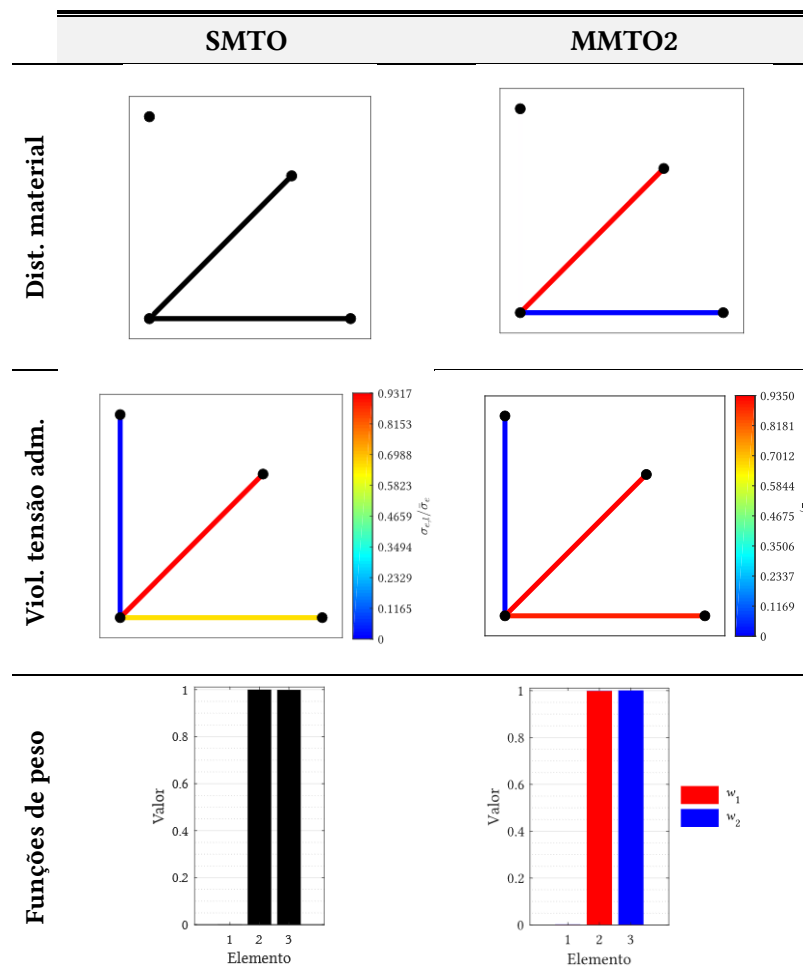
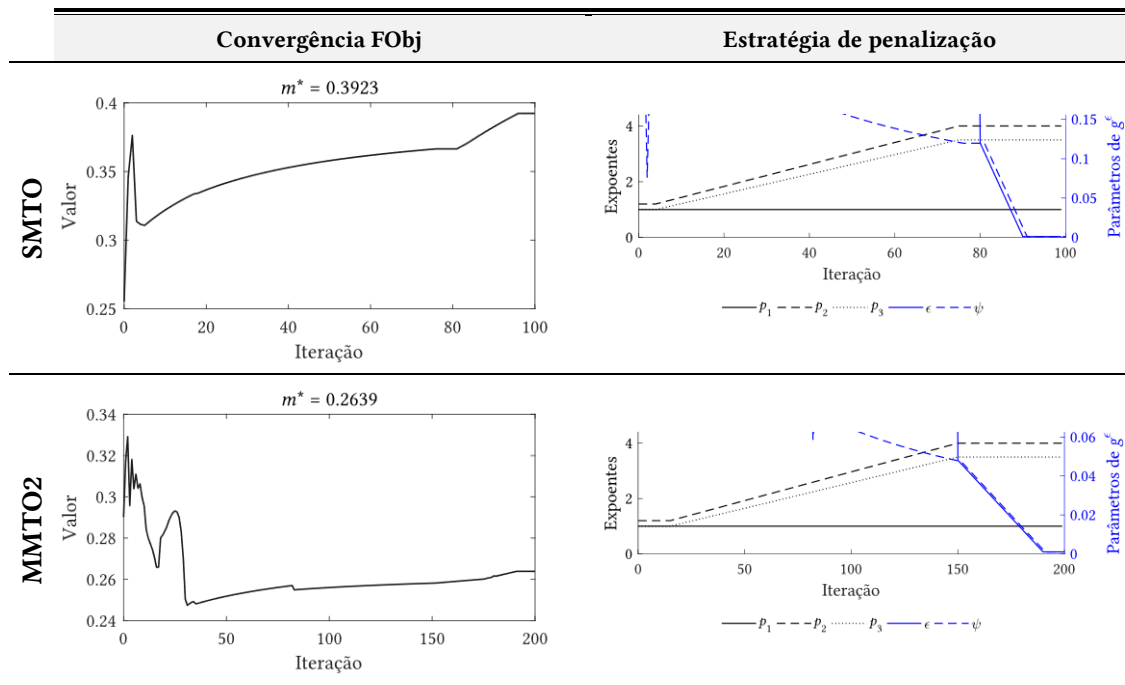


Tabela 6.3: Treliza de 3 barras – parâmetros da optimização.

Problema	m^*	$\Delta_{\pi}(m^*)$	Viol. máx. const. no ponto óptimo	c_{MMA}	p_1	p_2	p_3	ε_{\min}	\mathbf{x}'
SMTO	0.3923	N/A	-5.18×10^{-5}	10^7	1	$1.2 \rightarrow 4$	$1 \rightarrow 3.5$	0.001	$[0.25 \ 0.75 \ 0.50]$
MMTO2	0.2639	-33%	1.12×10^{-4}						$x'_{e,m} = 1/n^m$

Tabela 6.4: Treliza de 3 barras – convergência da função objectivo e estratégia de penalização.



Para uma visualização dos tempos de optimização e/ou do histórico da violação máxima dos constrangimentos remete-se o leitor para os Anexos A e B, respectivamente. Para consultar os parâmetros da estratégia de penalização de forma mais detalhada ver o Anexo C.

6.2 Treliça de 10 barras

Neste ponto considera-se uma treliça de 10 barras, adaptada de [53], discretizada em 6 nós que conectam 10 elementos finitos. Os dados utilizados com este exemplo numérico podem ser consultados na Figura 6.2.

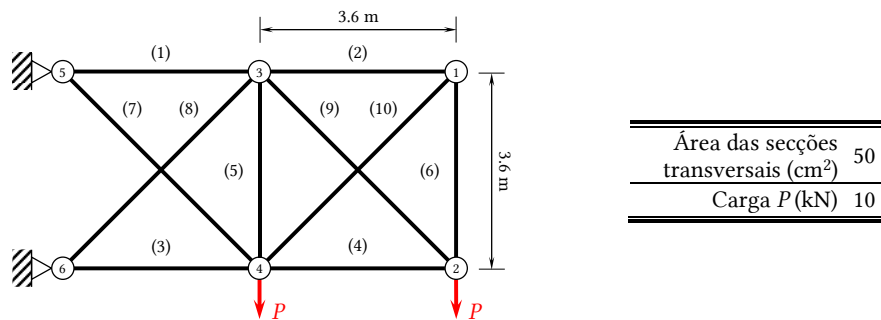
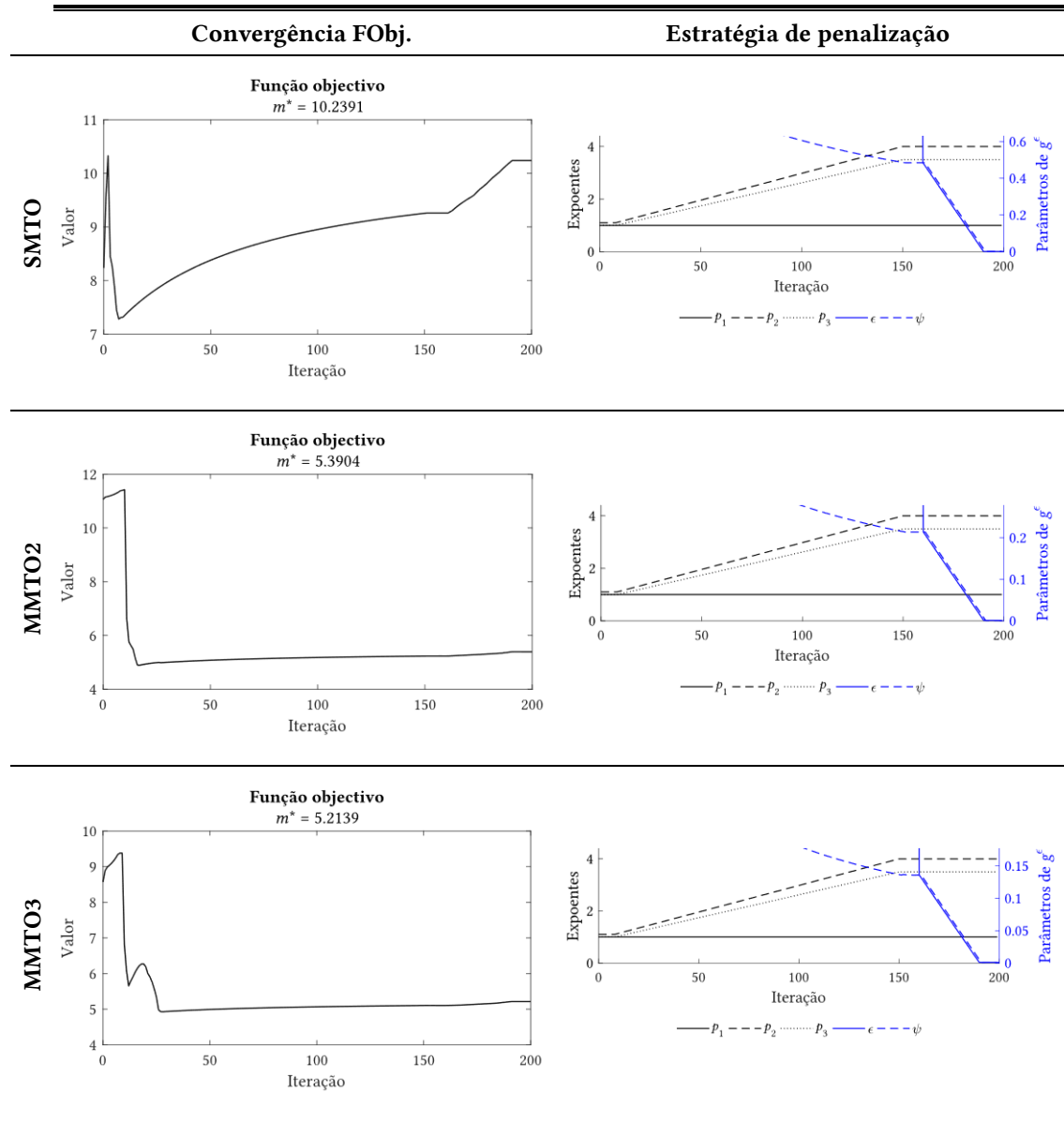


Figura 6.2: Dados da treliça de 10 barras.

Os resultados obtidos em termos de distribuição de material, violação das tensões admissíveis e valor das funções de peso na solução óptima podem ser consultados na Tabela 6.5. É importante referir que, nas figuras de distribuição de material daqui em diante, o facto de alguns elementos aparecerem “cortados” resulta da representação de elementos que ficaram com a fase de vazio associada e, portanto, encontram-se representados a branco.

Neste exemplo, a topologia óptima foi a mesma nos três problemas. Em SMTO, obteve-se uma estrutura com 10.2391 kg constituída por seis barras de aço. Na passagem para MMTO2, quatro dessas barras passaram a ser de alumínio, o que permitiu reduzir a massa da estrutura e aproximar o *design* de um FSD. Embora a progressão para MMTO3 tenha aproximado ainda mais o *design* de um FSD através da substituição de uma barra de alumínio por uma de magnésio, a melhoria de massa relativamente ao problema de MMTO2 não foi muito significativa. Contudo, com o *layout* óptimo do problema MMTO3, tem-se uma estrutura com uma massa 49% inferior à estrutura SMTO. As melhorias de massa e alguns parâmetros da optimização podem ser consultados na Tabela 6.6. Na Tabela 6.7 apresenta-se a convergência da função objectivo e a estratégia de penalização utilizada nos três problemas.

Tabela 6.7: Treliza de 10 barras – convergência da função objectivo e estratégia de penalização.



6.3 Treliza de 11 barras

O exemplo que se segue visa demonstrar a aplicabilidade desta metodologia quando o número de casos de carga é superior a 1. A estrutura reticulada de 11 barras, adaptada de [53], é discretizada em 11 elementos finitos conectados por 6 nós e está suportada por 4 apoios fixos, podendo-se consultar os dados estipulados na Figura 6.3.

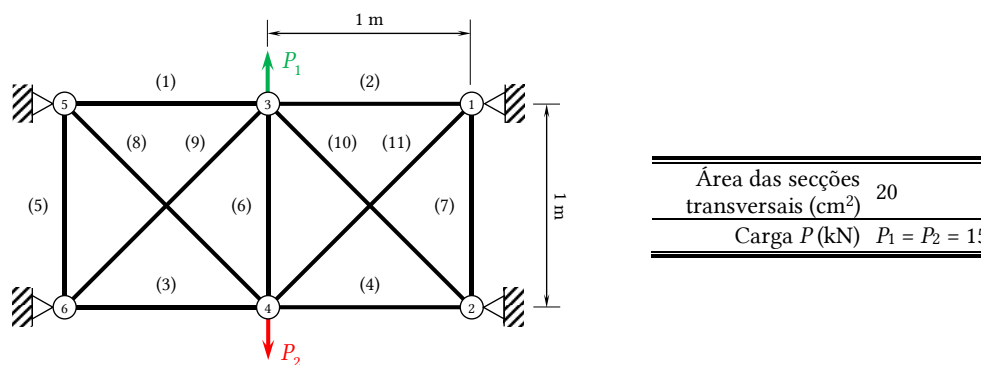


Figura 6.3: Dados da treliça de 11 barras.

Começou-se por resolver o problema SMTO, tendo-se obtido uma estrutura de 5 barras de aço com 1.0458 kg. Como existe simetria no modelo numérico e na aplicação dos carregamentos, as distribuições de tensões para cada caso de carga também são simétricas. Posteriormente, resolveu-se o problema MMT02 e obteve-se uma estrutura com a mesma topologia, contudo 56% mais leve, como resultado de quatro barras de aço terem sido substituídas por quatro barras de alumínio. As distribuições de material, da violação das tensões admissíveis e o valor final das funções de peso podem ser vistas na Tabela 6.8.

Os valores da massa das estruturas e alguns parâmetros da optimização constam na Tabela 6.9. Na Tabela 6.10 apresenta-se o histórico da convergência da função objectivo e a estratégia de penalização utilizada em cada problema.

Assumindo que se manteria esta topologia, a consideração da fase adicional de magnésio não traria qualquer mais valia, pois o *design* obtido está suficientemente perto de um FSD e, portanto, a tensão admissível do magnésio seria violada em qualquer elemento. Houve correspondência com os resultados do AG nos dois problemas.

Tabela 6.8: Treliza de 11 barras – distribuições de material, distribuições da violação das tensões admissíveis e valor das funções de peso no óptimo dos problemas resolvidos pelo MMA.

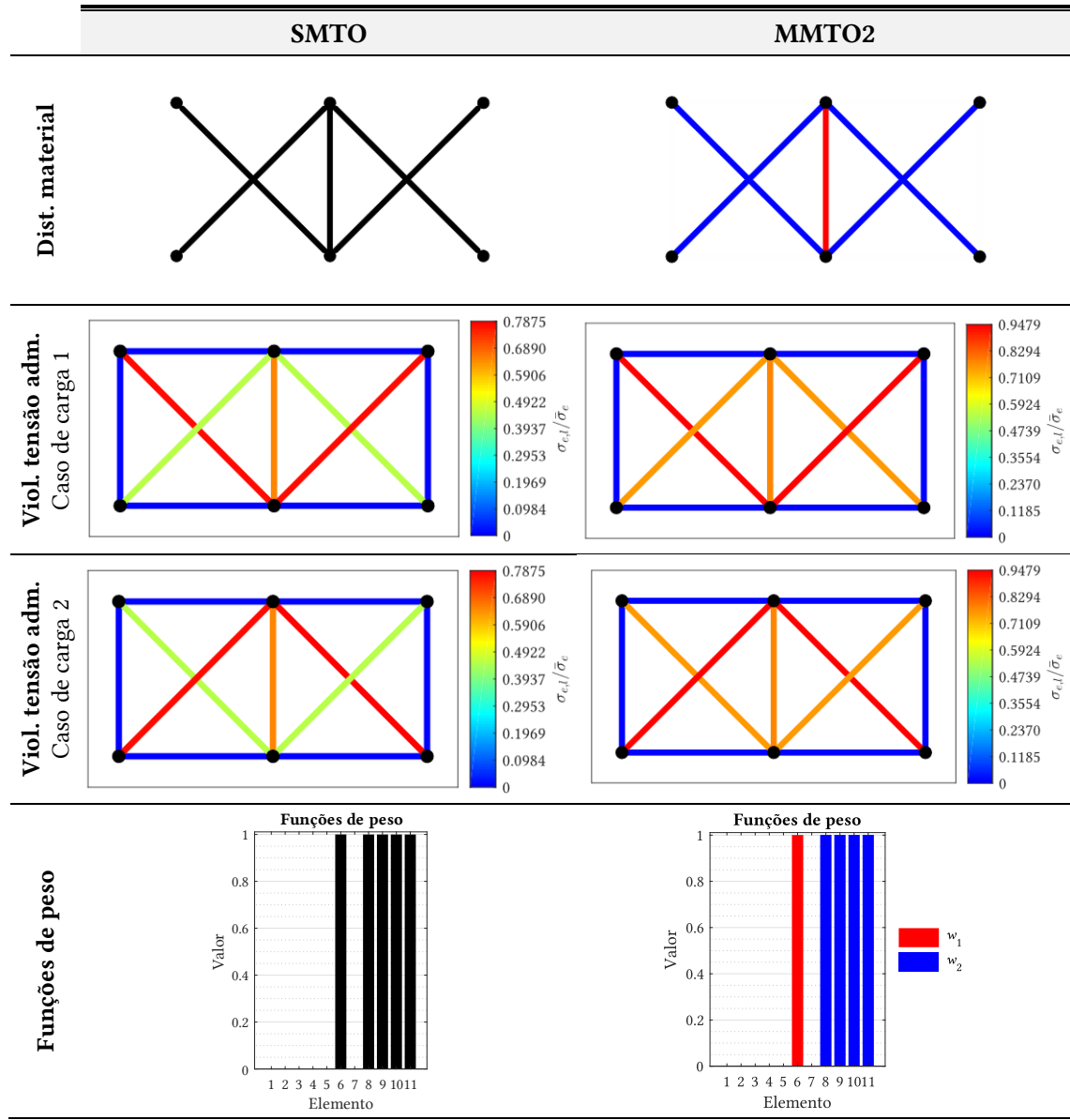
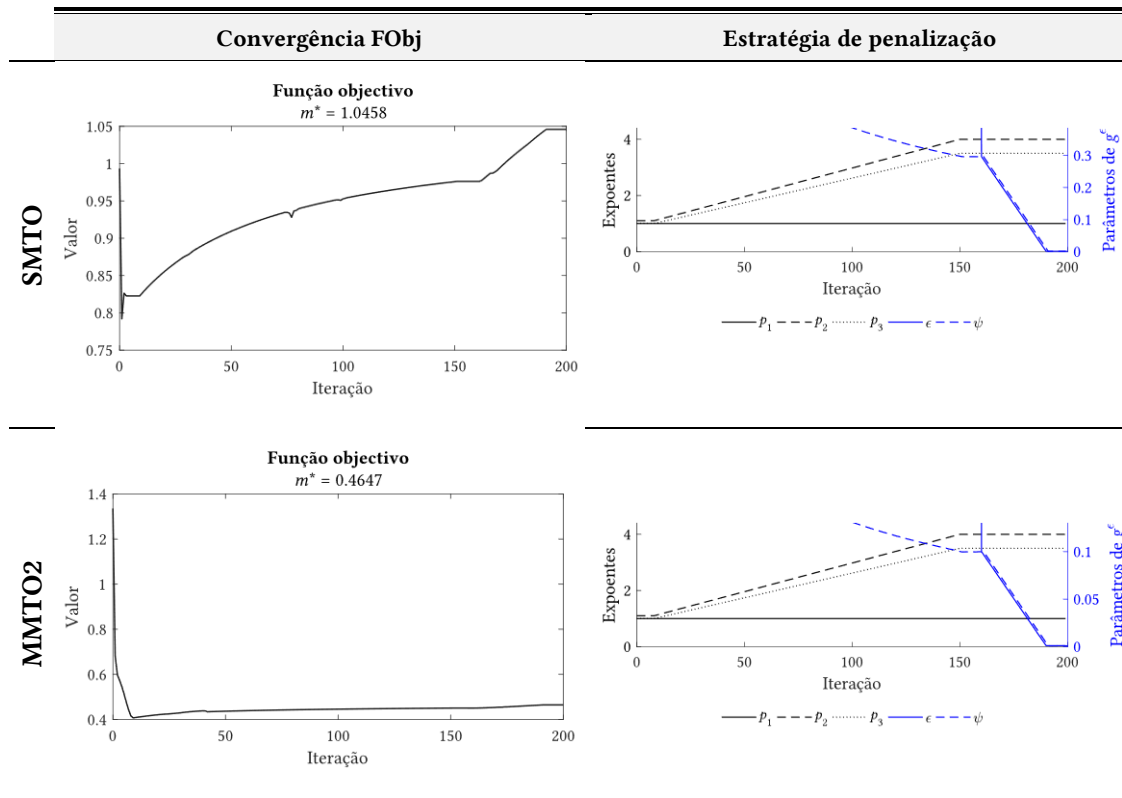


Tabela 6.9: Treliza de 11 barras – parâmetros da optimização.

Problema	m^*	$\Delta_\pi(m^*)$	Viol. máx. const. no ponto óptimo	c_{MMA}	p_1	p_2	p_3	ε_{\min}	\mathbf{x}'
SMT0	1.0458	N/A	-4.75×10^{-5}	10^7	1	$1.1 \rightarrow 4$	$1 \rightarrow 3.5$	0.001	$x'_e = 0.5$
MMTO2	0.4647	-56%	-1.05×10^{-3}						$x'_{e,m} = 1/n^m$

Tabela 6.10: Treliza de 11 barras – convergência da função objectivo e estratégia de penalização.



6.4 Treliza de 21 barras

Neste ponto, considera-se uma estrutura reticulada de 21 barras (Figura 6.4) adaptada de [54] e discretizada num modelo numérico constituído por 11 elementos finitos conectados por 6 nós, após aplicação de condições de simetria.

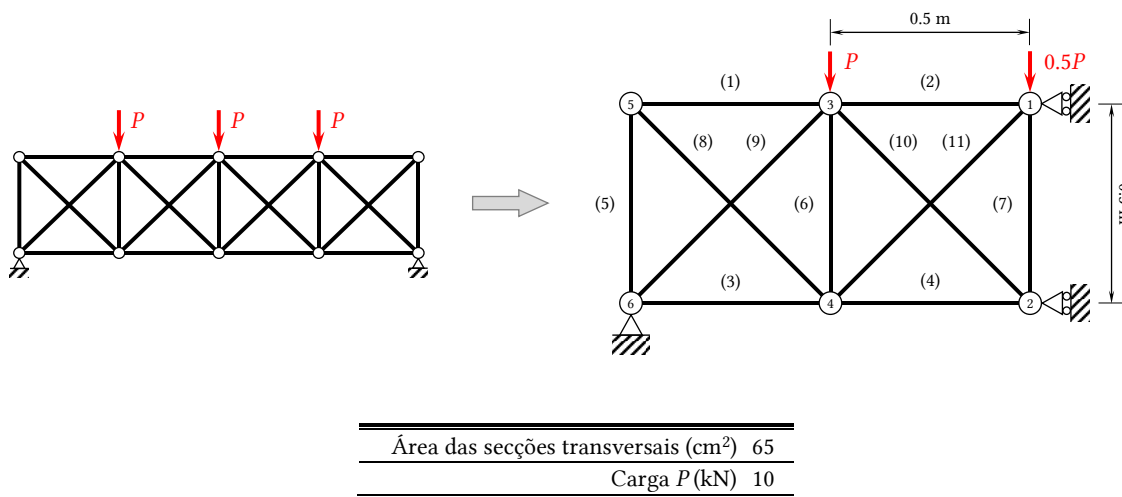


Figura 6.4: Dados da treliza de 21 barras (11 barras após aplicação de condições de simetria).

Na Tabela 6.11 apresentam-se as distribuições de material, violação das tensões admissíveis e valor final das funções de peso dos 3 problemas resolvidos: SMT0, MMTO2 e MMTO3.

O resultado SMT0 consiste numa estrutura de 4 barras (7 barras depois de desconsiderada a simetria) com 2.4670 kg. A consideração de uma fase adicional de alumínio deu origem a uma estrutura mais leve com a mesma topologia da estrutura do problema anterior. Como se pode ver pelas figuras da violação das tensões admissíveis dos problemas SMT0 e MMTO 2, o quociente $\sigma_{e,l}/\bar{\sigma}_e$ máximo passou de 0.7695 para 0.9926, pelo que a estrutura está agora mais perto de um FSD. O resultado obtido no problema MMTO3 corresponde a uma estrutura constituída apenas por alumínio e magnésio ainda mais leve que o *layout* óptimo do problema MMTO2. É possível tirar duas ilações importantes com base neste resultado: (1) nada garante que a topologia da estrutura tenha de se manter à medida que se aumenta o número de fases de material e (2) nada garante que no *layout* óptimo estão presentes todas as fases de material disponíveis.

Na Tabela 6.12 apresentam-se os valores da massa dos vários problemas, bem como alguns parâmetros da optimização. Para uma visualização do histórico das funções objectivo e das estratégias de penalização ver a Tabela 6.13.

Tabela 6.11: Treliza de 21 barras – distribuições de material, distribuições da violação das tensões admissíveis e valor das funções de peso no óptimo dos problemas resolvidos pelo MMA.

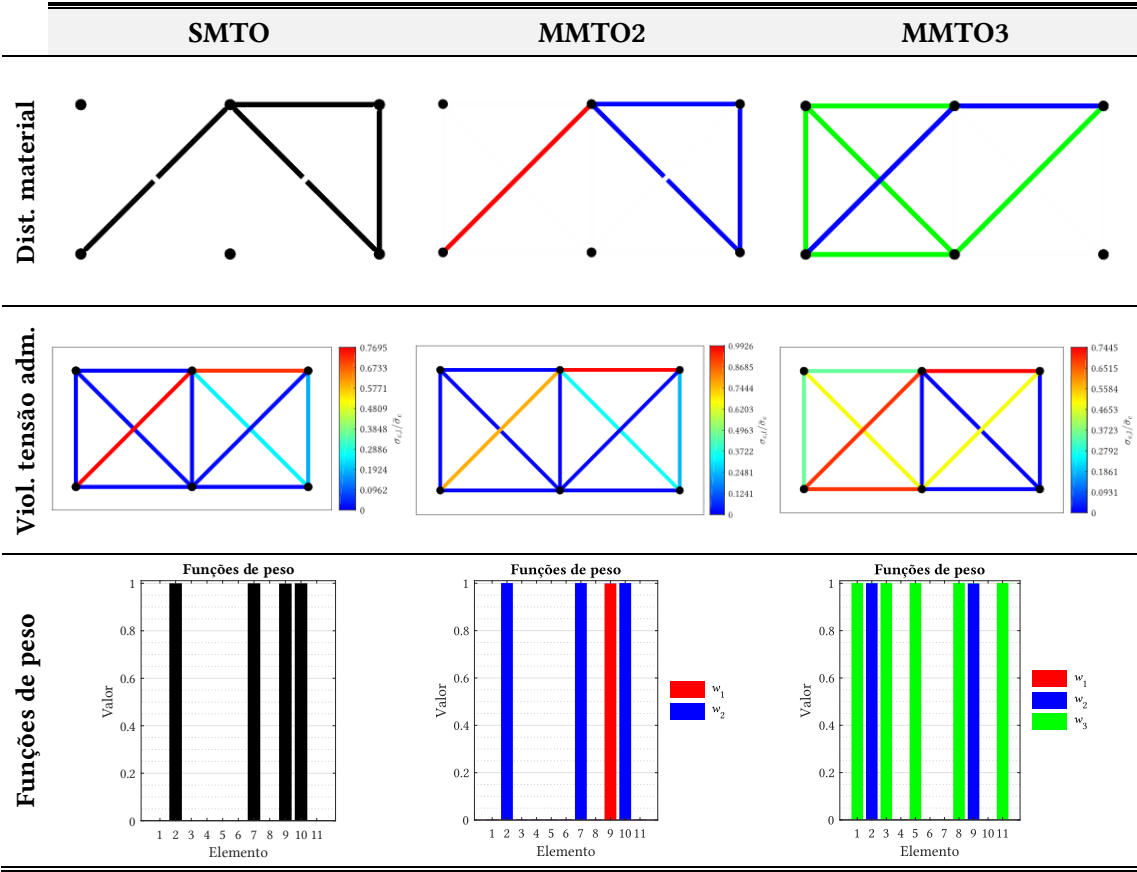
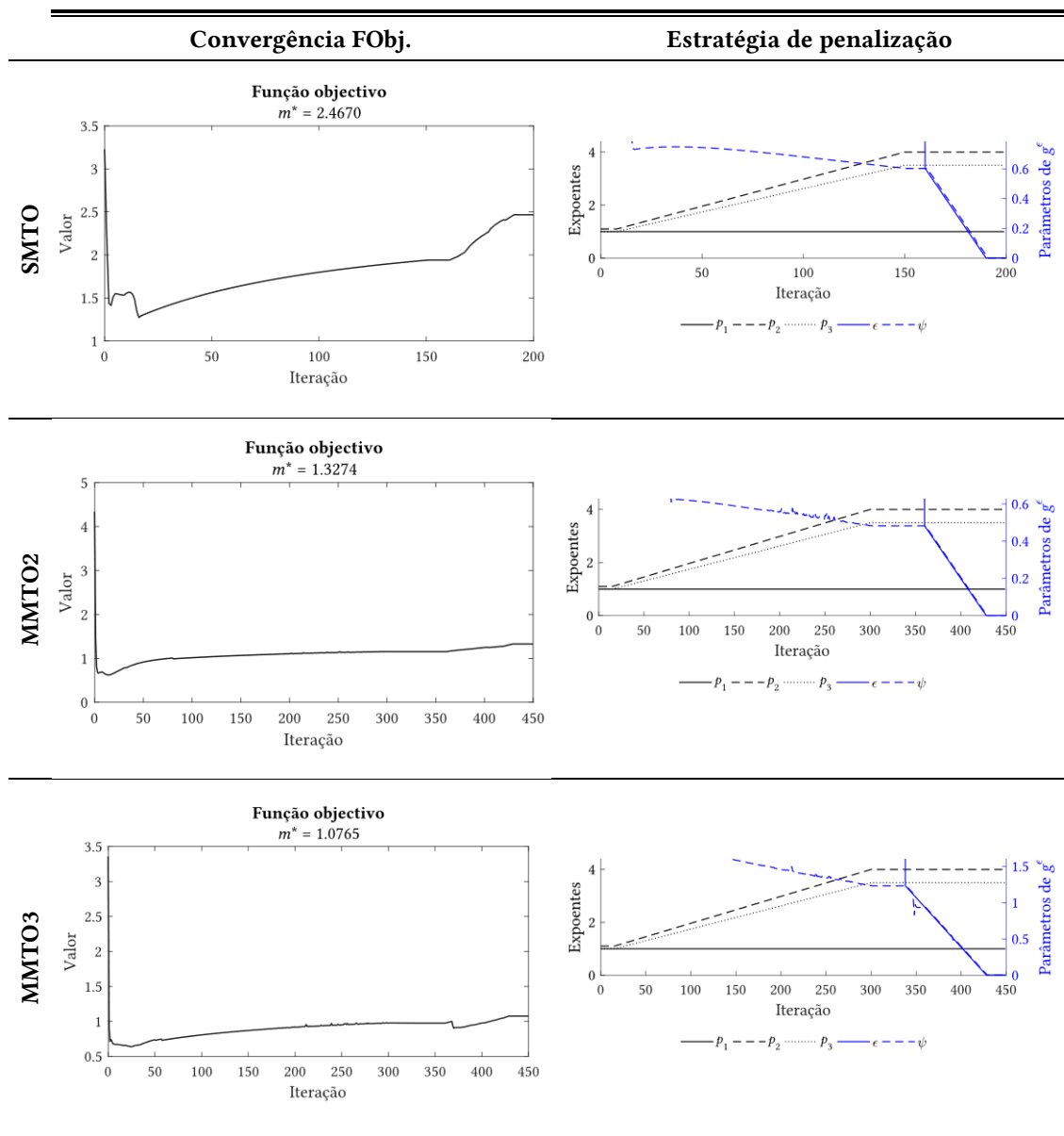


Tabela 6.12: Treliza de 21 barras – parâmetros da otimização.

Problema	m^*	$\Delta_{\%}(m^*)$	Viol. máx. const. no ponto ótimo	c_{MMA}	p_1	p_2	p_3	ε_{\min}	\mathbf{x}'
SMTO	2.4670	N/A	-1.00×10^{-3}	10^6	1	$1.1 \rightarrow 4$	$1 \rightarrow 3.5$	0.001	$x'_e = 0.5$
MMTO2	1.3274	-46%	-2.11×10^{-4}						$x'_{e,m} = 1/n^m$
MMTO3	1.0765	-56%	-1.01×10^{-3}						

Tabela 6.13: Treliza de 21 barras – convergência da função objectivo e estratégia de penalização.



6.5 Treliza de 26 barras

Este exemplo é uma variante do conhecido *L-Bracket* (ou gancho), muito utilizado na literatura em problemas de elasticidade plana (e.g. [25, 42]). A *ground structure* aqui utilizada é formada por 26 barras conectadas por 12 nós. Na Figura 6.5 apresentam-se os dados considerados nos problemas desta estrutura.

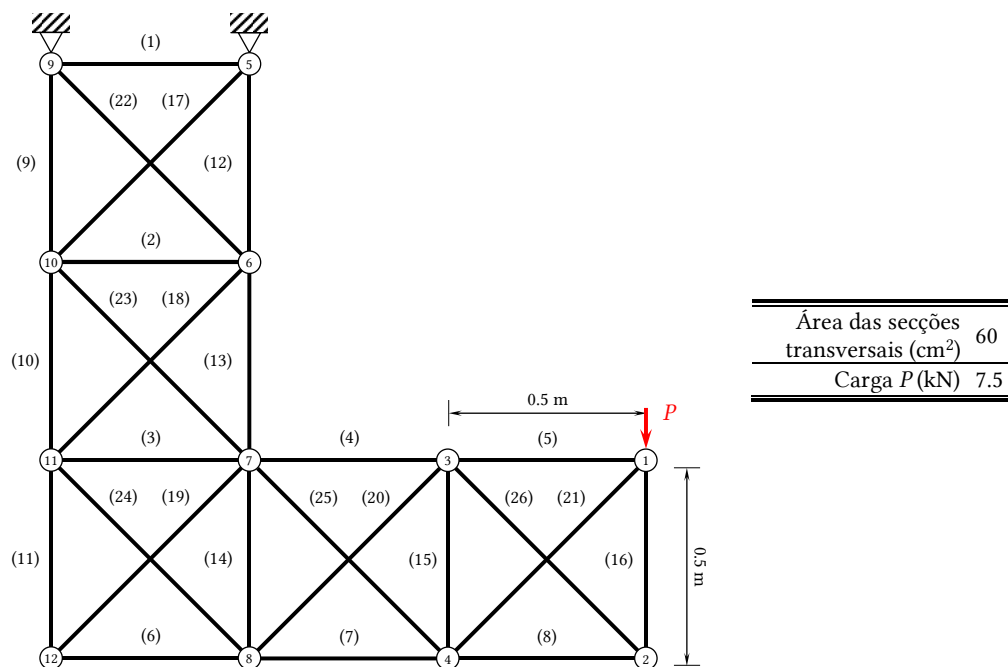


Figura 6.5: Dados da treliça de 26 barras.

Na Tabela 6.14 apresentam-se as distribuições de material, violação das tensões admissíveis e valor final das funções de peso dos problemas SMT0, MMTO2 e MMTO3 resolvidos. Os valores da massa das estruturas e outros parâmetros da optimização podem ser consultados na Tabela 6.15. Na Tabela 6.16, apresentam-se as convergências das funções objectivo dos problemas e estratégia de penalização utilizada em cada um deles. Em comparação com os resultados obtidos pelo AG, o MMA chegou a soluções com igual valor de massa nos problemas SMT0 e MMTO2, tendo alcançado um valor de massa económico que o AG no problema MMTO3.

Tabela 6.14: Treliza de 26 barras – distribuições de material, distribuições da violação das tensões admissíveis e valor das funções de peso no óptimo dos problemas resolvidos pelo MMA.

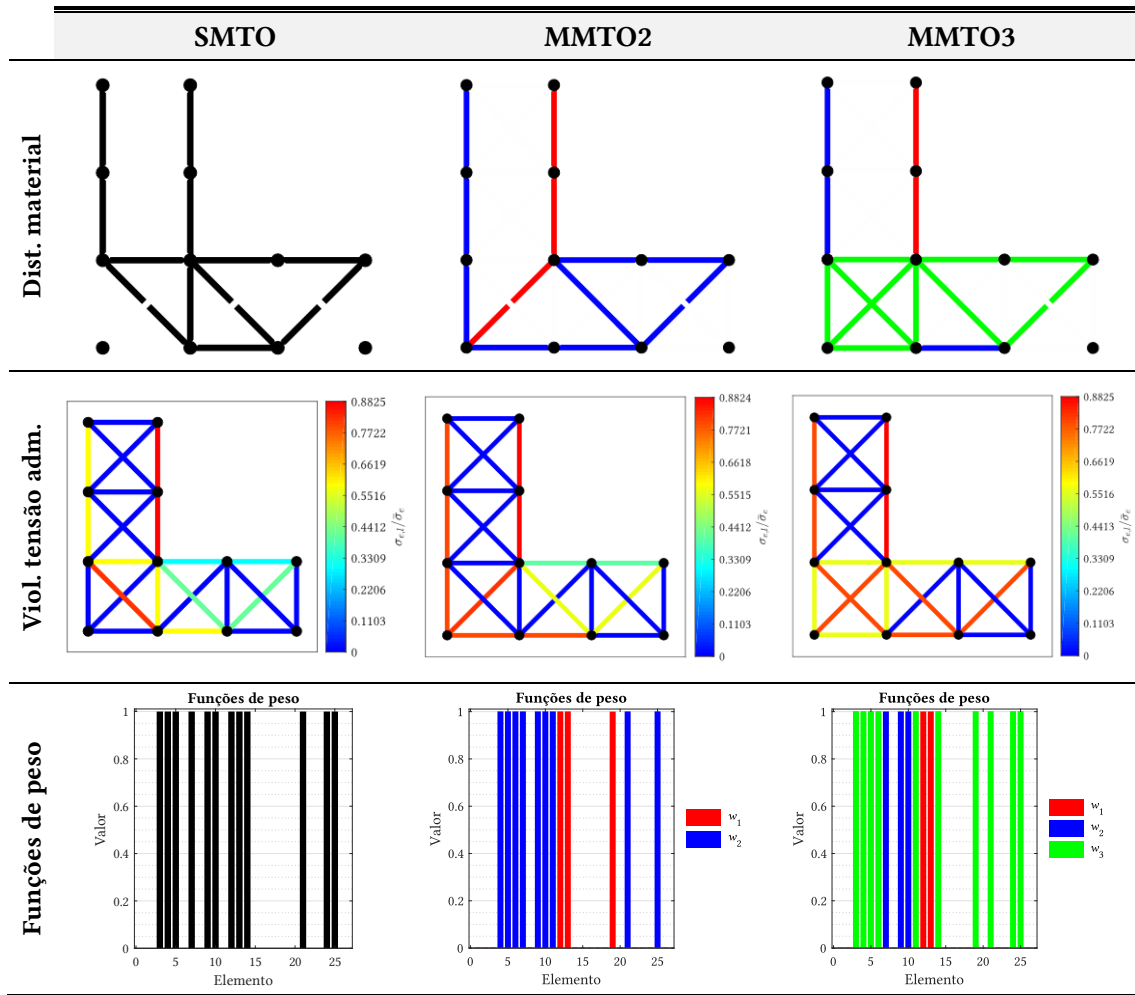
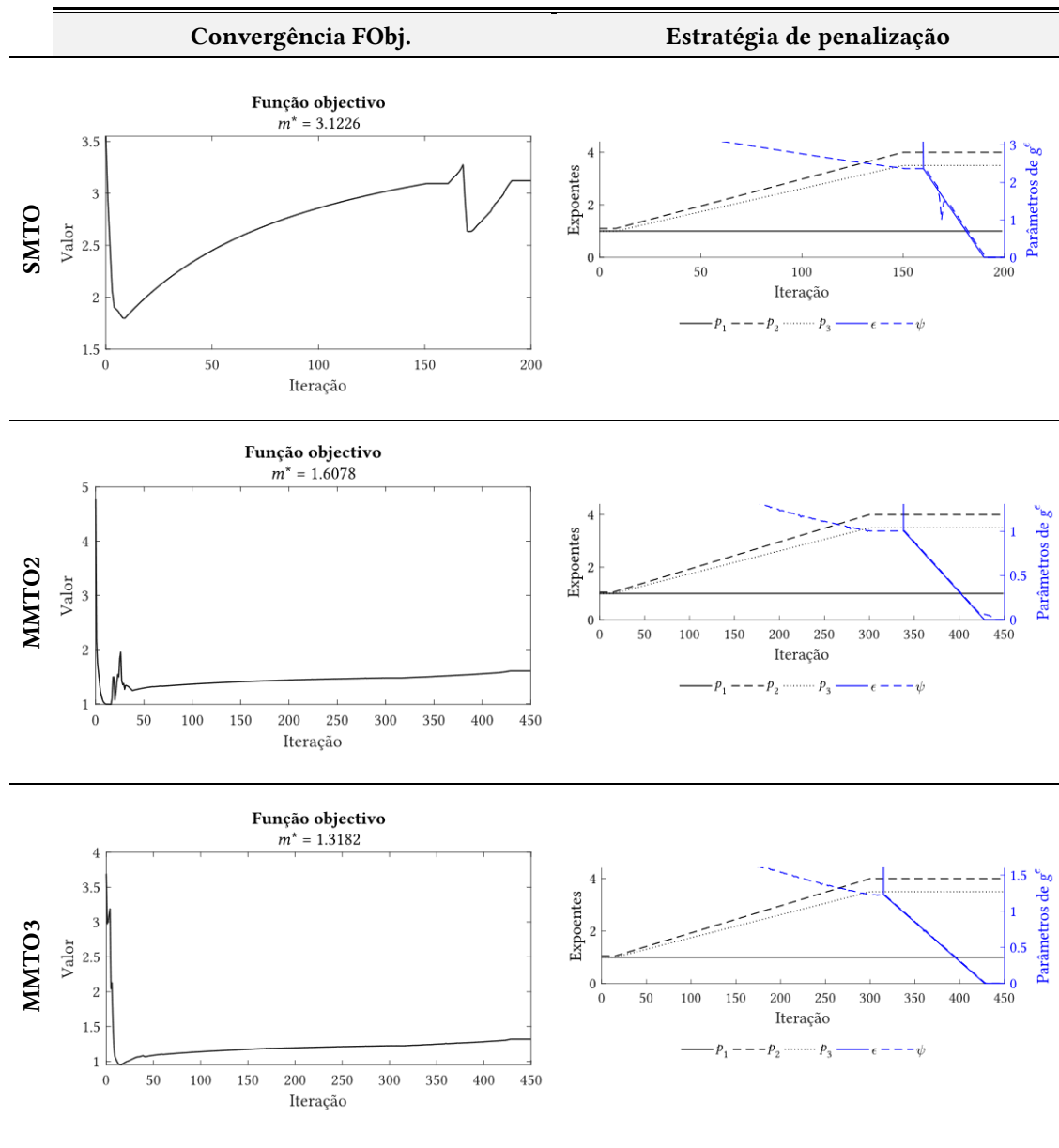


Tabela 6.15: Treliza de 26 barras – parâmetros da otimização.

Problema	m^*	$\Delta_{\infty}(m^*)$	Viol. máx. const. no ponto ótimo	c_{MMA}	p_1	p_2	p_3	ε_{\min}	\mathbf{x}'
SMT0	3.1226	N/A	-1.04×10^{-3}	10^6	1	$1.1 \rightarrow 4$	$1 \rightarrow 3.5$	0.001	$x'_e = 0.5$
MMTO2	1.6078	-49%	-1.00×10^{-3}	10^8		$1.05 \rightarrow 4$			$x'_{e,m} = 1/n^m$
MMTO3	1.3182	-59%	-1.01×10^{-3}						

Tabela 6.16: Treliza de 26 barras – convergência da função objectivo e estratégia de penalização.



Tendo-se à disposição as soluções obtidas pelo AG, é relativamente fácil perceber se o MMA está a obter resultados com qualidade. Embora tenha havido coerência entre os valores de massa obtidos nos problemas SMTO e MMTO2 entre os dois algoritmos e o MMA tenha conseguido um melhor resultado no problema MMTO3, a distribuição de material dos resultados MMTO2 dos dois algoritmos não foi idêntica – Figura 6.6. Se o ponto de partida fornecido ao MMA for suficientemente próximo da solução do AG, o MMA converge para essa solução, como seria de esperar, embora esta seja uma prática a evitar pois está-se a pressupor a solução à partida. Deste modo, fica mais uma vez clara a influência que o ponto de partida tem na convergência de algoritmos baseados na informação do gradiente.

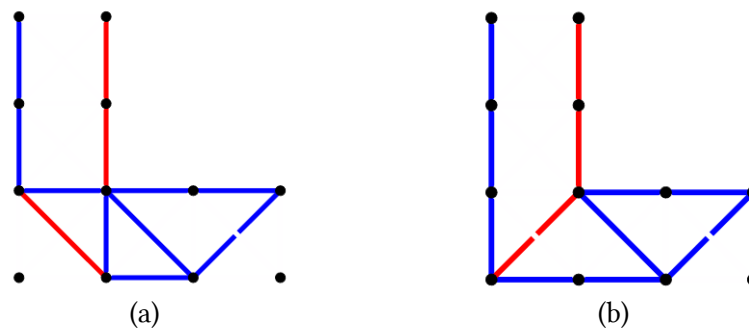
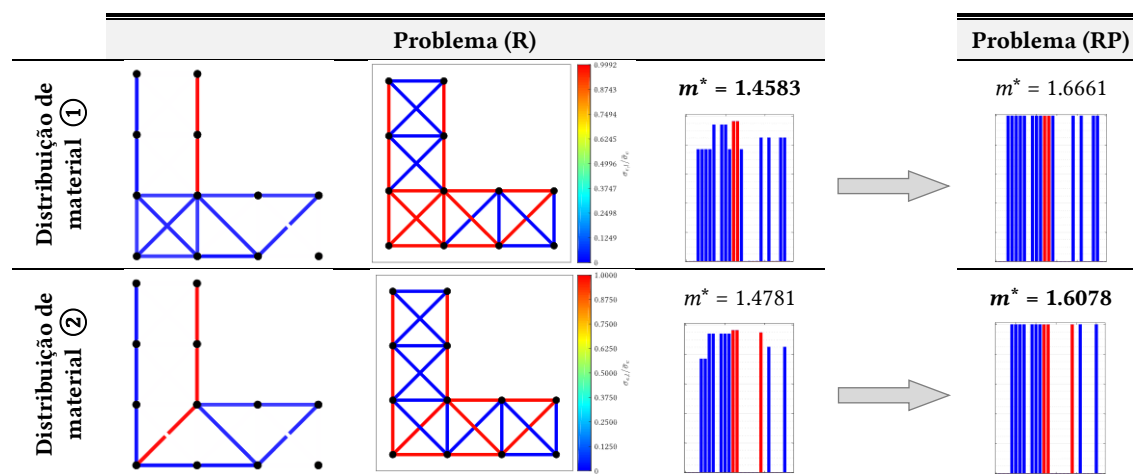


Figura 6.6: Treliza de 26 barras – (a) solução do problema MMTO2 obtida pelo AG (b) solução do problema MMTO2 obtida pelo MMA.

Para além disso, no problema MMTO2 foi particularmente difícil encontrar os parâmetros que conduziram o MMA para uma solução com $m^* = 1.6078$ ou um valor inferior. Após um teste exaustivo de valores de parâmetros da optimização chegou-se à conclusão de que, caso o constrangimento g^e só entre no intervalo I_2 a distribuição de material já estará decidida, muito provavelmente. Nestas condições, no final do intervalo I_1 a estrutura apresenta uma distribuição de material com valores intermédios de densidade, correspondente à estrutura óptima do problema (R). Ora, a estrutura óptima do problema (R) não tem de ser necessariamente a estrutura óptima do problema (RP), conforme mostra a Tabela 6.17. Nesta tabela, constam duas distribuições de material obtidas com uma formulação (R) utilizando diferentes parâmetros, uma que se crê ser a solução óptima global do problema (R), com um valor de massa $m^* = 1.4583$, e outra com um valor de massa $m^* = 1.4781$. Quando se utilizam estas soluções como ponto de partida da formulação (RP), o constrangimento g^e faz com que os valores intermédios de densidade sejam penalizados e se obtenham os valores de massa 1.6661 e 1.6078 para as distribuições ① e ②, respectivamente. Como se pode ver, embora a distribuição ① seja a solução óptima do problema (R), a estrutura óptima do problema (RP) apresenta a distribuição de material ②.

Tabela 6.17: Treliza de 26 barras - comparação entre as versões (R) e (RP) de duas distribuições de material.



É ainda possível verificar que nos óptimos dos problemas (R), todos os constrangimentos de tensão estão activos e as estruturas estão completamente em FSD, tal como seria expectável, pois não havendo qualquer restrição no valor das variáveis de projecto, estas tomam valores intermédios por forma a minimizar a massa da estrutura.

6.6 Treliça de 36 barras

Considere-se agora uma treliça de 36 barras (adaptada de [91]), cujo modelo de elementos finitos é constituído por 36 elementos de barra conectados por 16 nós – Figura 6.7.

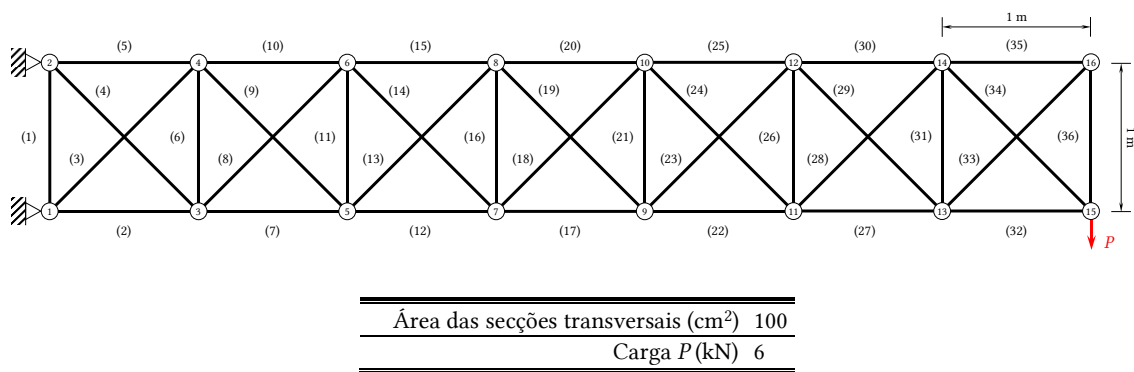


Figura 6.7: Dados da treliça de 36 barras.

As distribuições de material e o valor final das funções de peso dos problemas SMT0, MMTO2 e MMTO3 resolvidos podem ser consultados na Tabela 6.18. Embora tenham sido obtidas estruturas discretas com a mesma topologia, a distribuição varia de problema para problema. Como é possível comprovar pelas distribuições de material MMTO2 e MMTO3, a estrutura é reforçada com os materiais mais resistentes nos elementos mais próximos dos apoios fixos. Como se pode ver pela violação das tensões admissíveis da Tabela 6.19, à medida que se aumenta o número de materiais disponíveis, o design tende a aproximar-se de um FSD, apesar de neste exemplo com estas fases de material alguns elementos ficarem um pouco aquém disso. Mais uma vez, com o aumento do número de fases disponíveis a função objectivo apresenta valores sucessivamente mais baixos, pelo facto de se estar a aumentar o espaço de projecto – Tabela 6.20. Na Tabela 6.21 apresenta-se a convergência da função objectivo e a estratégia de penalização utilizada. Os resultados SMT0 e MMTO2 obtidos são coerentes com o AG. No problema MMTO3 o AG começou a denunciar a sua natureza probabilística, chegando-se com facilidade a estruturas com distribuições de material que, embora a tensão admissível nos seus elementos seja cumprida, é visível que alguns elementos surgem de forma aleatória, fazendo-se a analogia com as “ilhas” nos problemas de elasticidade plana.

Tabela 6.18: Treliza de 36 barras – distribuições de material e funções de peso.

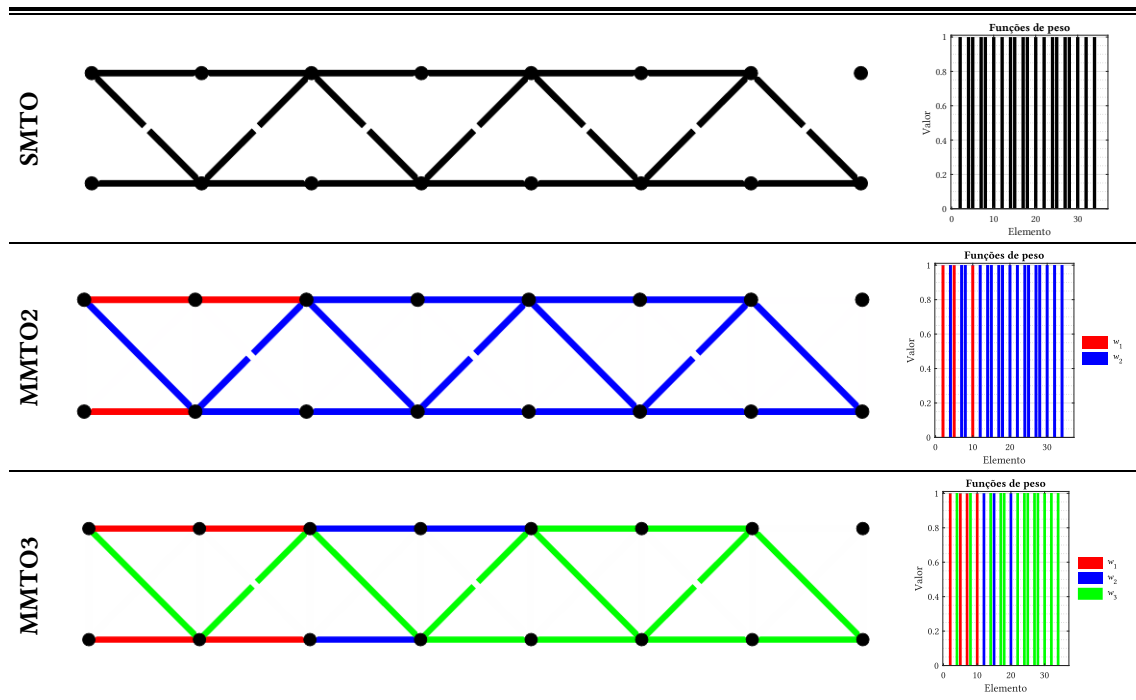


Tabela 6.19: Treliza de 36 barras – violação das tensões admissíveis.

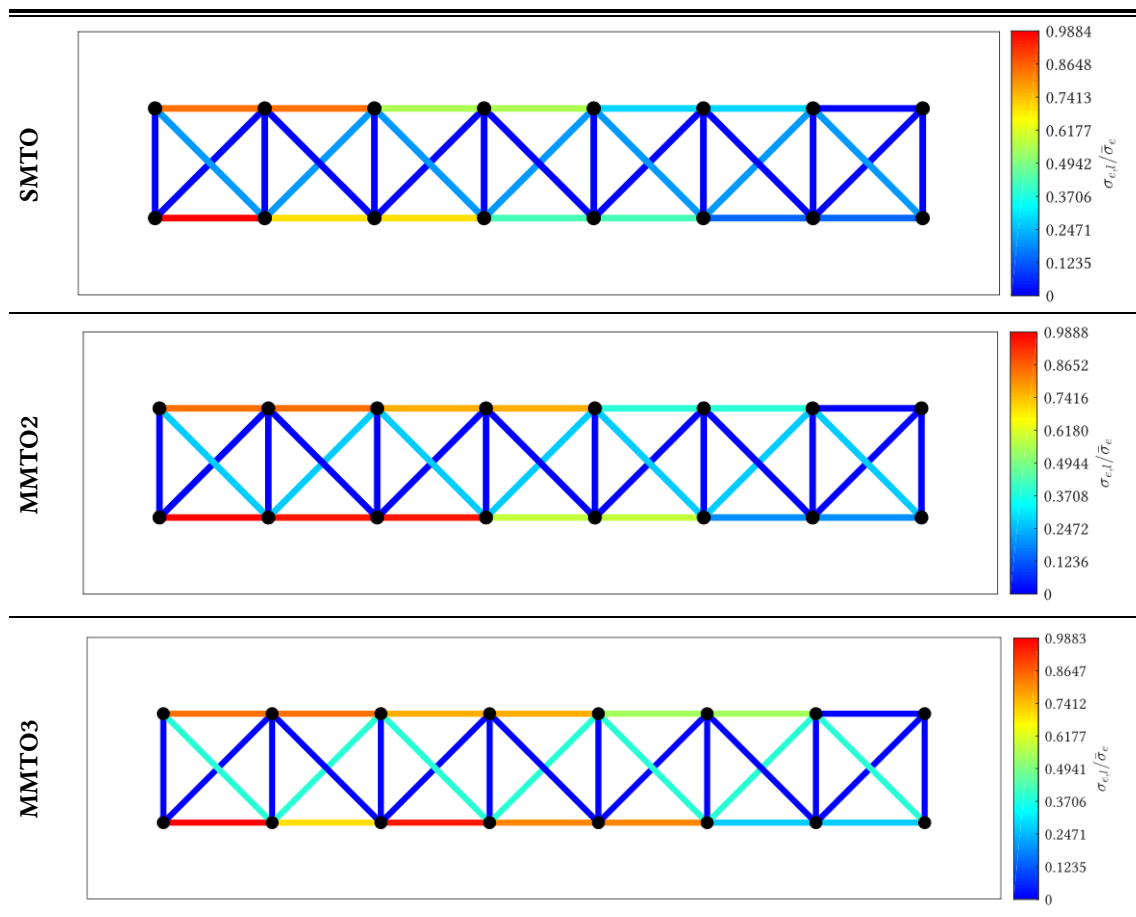
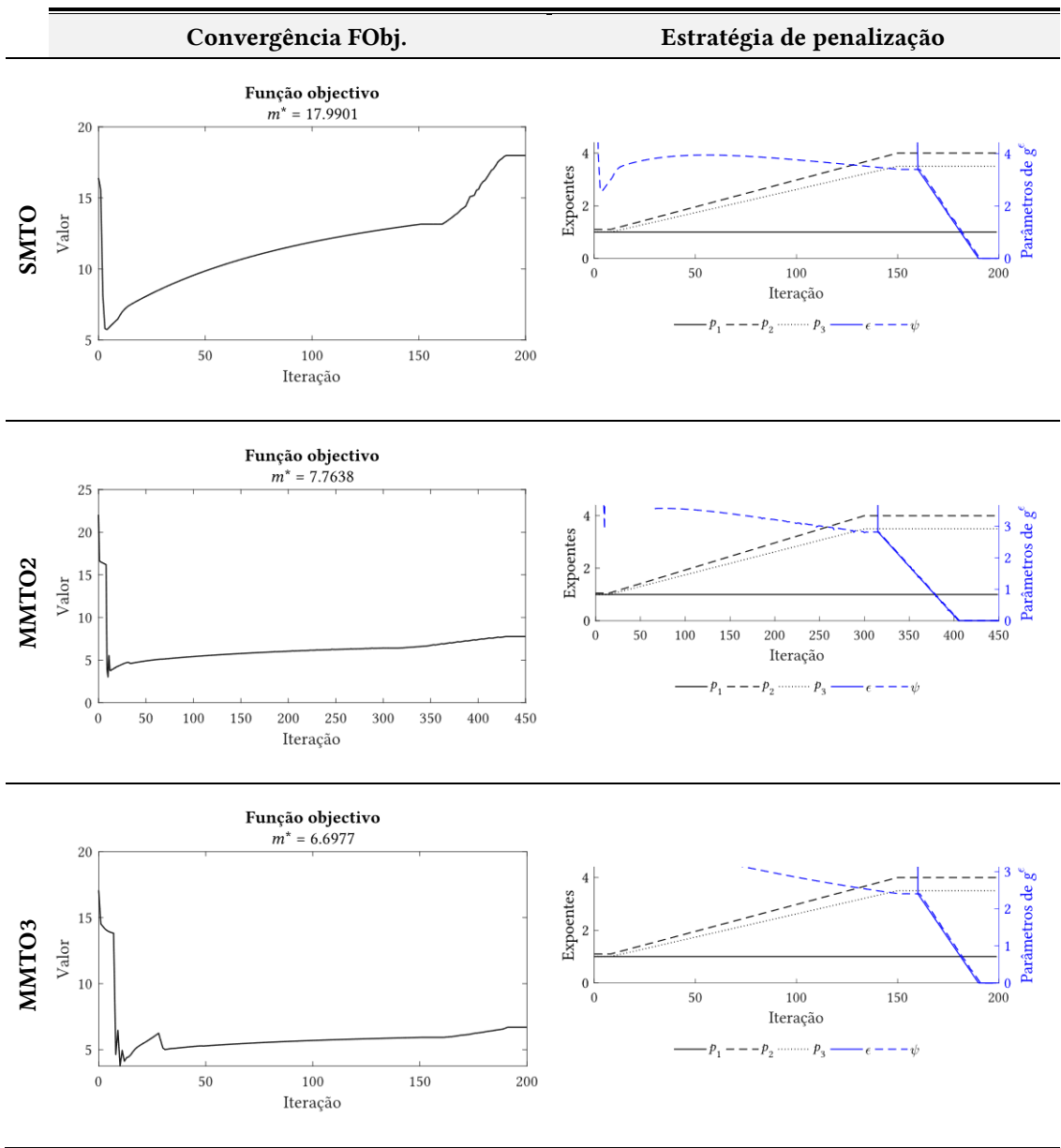


Tabela 6.20: Treliça de 36 barras – parâmetros da otimização.

Problema	m^*	$\Delta_{\%}(m^*)$	Viol. máx. const. no ponto ótimo	c_{MMA}	p_1	p_2	p_3	ε_{\min}	\mathbf{x}'
SMT0	17.9901	N/A	-1.04×10^{-3}	10^6	1	$1.1 \rightarrow 4$	$1 \rightarrow 3.5$	0.001	$x'_e = 0.5$
MMTO2	7.7634	-57%	-1.00×10^{-3}			$1.05 \rightarrow 4$			$x'_{e,m} = 1/n^m$
MMTO3	6.6977	-63%	-1.00×10^{-3}			$1.1 \rightarrow 4$			

Tabela 6.21: Treliça de 36 barras – convergência da função objectivo e estratégia de penalização.



6.7 Treliça de 110 barras

Por último, testou-se a metodologia apresentada nesta dissertação com um exemplo numérico de uma treliça de 110 barras (adaptado de [58]) que, neste caso, foi reduzida a um modelo numérico de 55 barras após aplicação de condições de simetria – Figura 6.8.

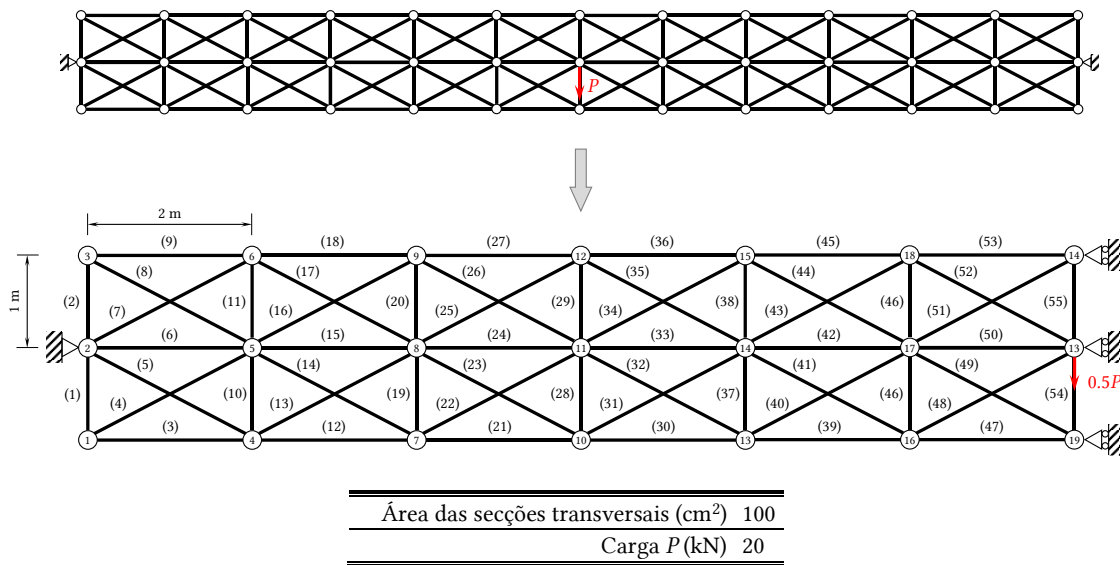


Figura 6.8: Dados da treliça de 110 barras (55 barras após aplicação de condições de simetria).

À semelhança do que se obteve com a estrutura de 36 barras, neste exemplo a topologia obtida foi a mesma nos três problemas resolvidos, tal como se pode ver na Tabela 6.22. De igual modo, com a consideração de mais fases de material, o design aproxima-se de um FSD (Tabela 6.23) e verifica-se um decréscimo sucessivo no valor da massa da estrutura (Tabela 6.24). Na Tabela 6.25 apresenta-se o histórico de convergência da função objectivo e a estratégia de penalização utilizada. Comparativamente ao algoritmo genético, o MMA teve um desempenho claramente superior. Não só os tempos de optimização foram muito menores, como se obtiveram soluções com um desempenho superior. Com o AG, no problema SMTO obtiveram-se estruturas que evidenciam ainda mais o carácter aleatório deste algoritmo. Nos problemas MMT02 e MMT03, após várias corridas com diferentes parâmetros, o AG não conseguiu obter nenhuma solução admissível. Como já foi referido, o AG serviu apenas como termo de comparação e como guia na obtenção de resultados. No exemplo com mais elementos apresentado nesta dissertação ficou claro que o AG começa a perder aplicabilidade. Os tempos de optimização do MMA, o histórico da violação máxima dos constrangimentos e os parâmetros da estratégia de penalização, podem ser consultados nos Anexos A, B e C, respectivamente.

Tabela 6.22: Treliça de 110 barras – distribuições de material e funções de peso.

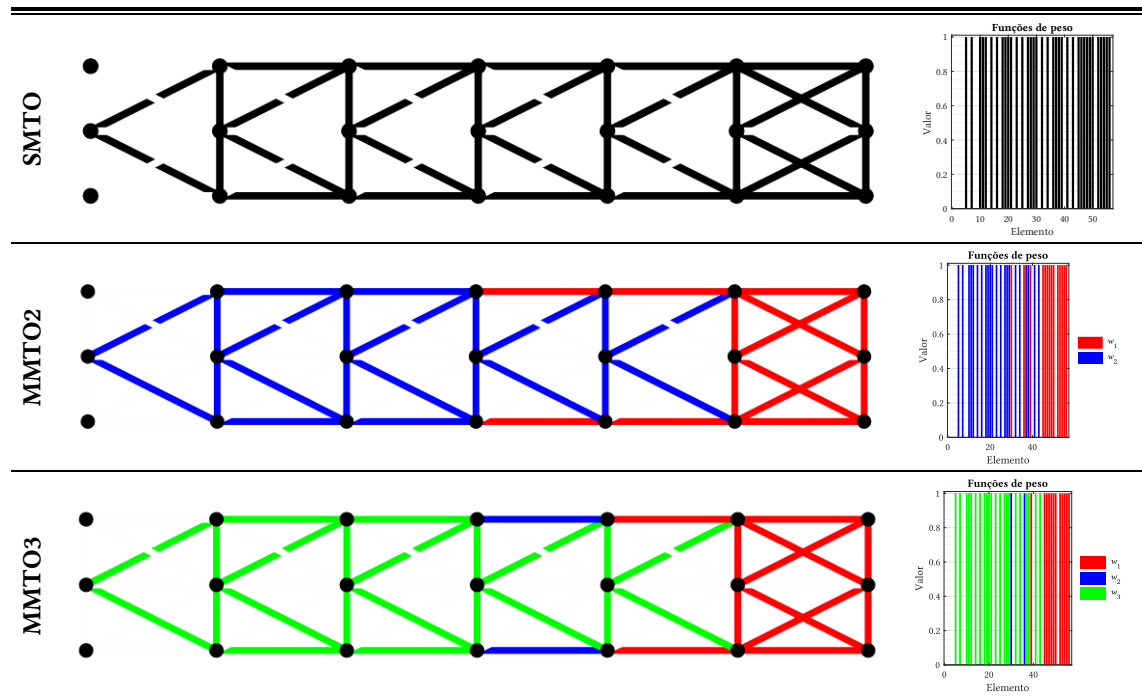


Tabela 6.23: Treliça de 110 barras – violação das tensões admissíveis.

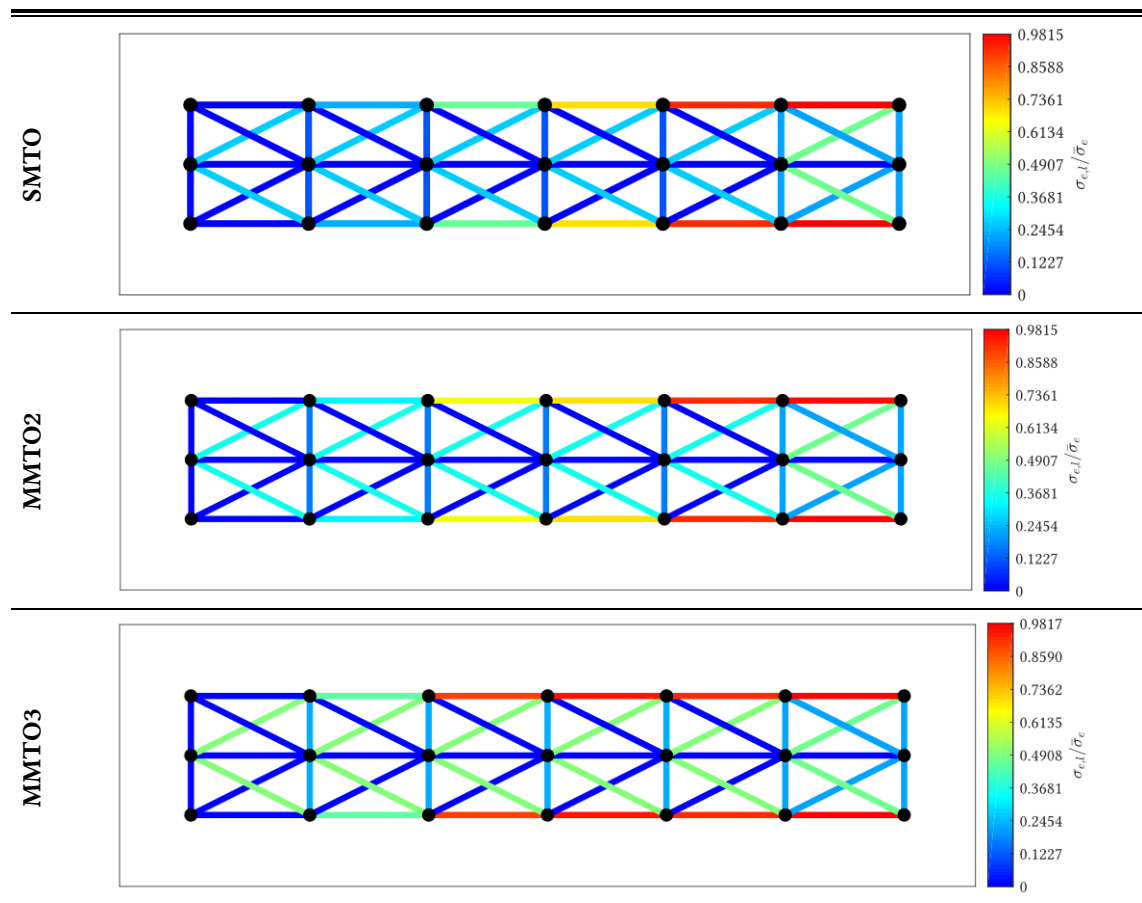
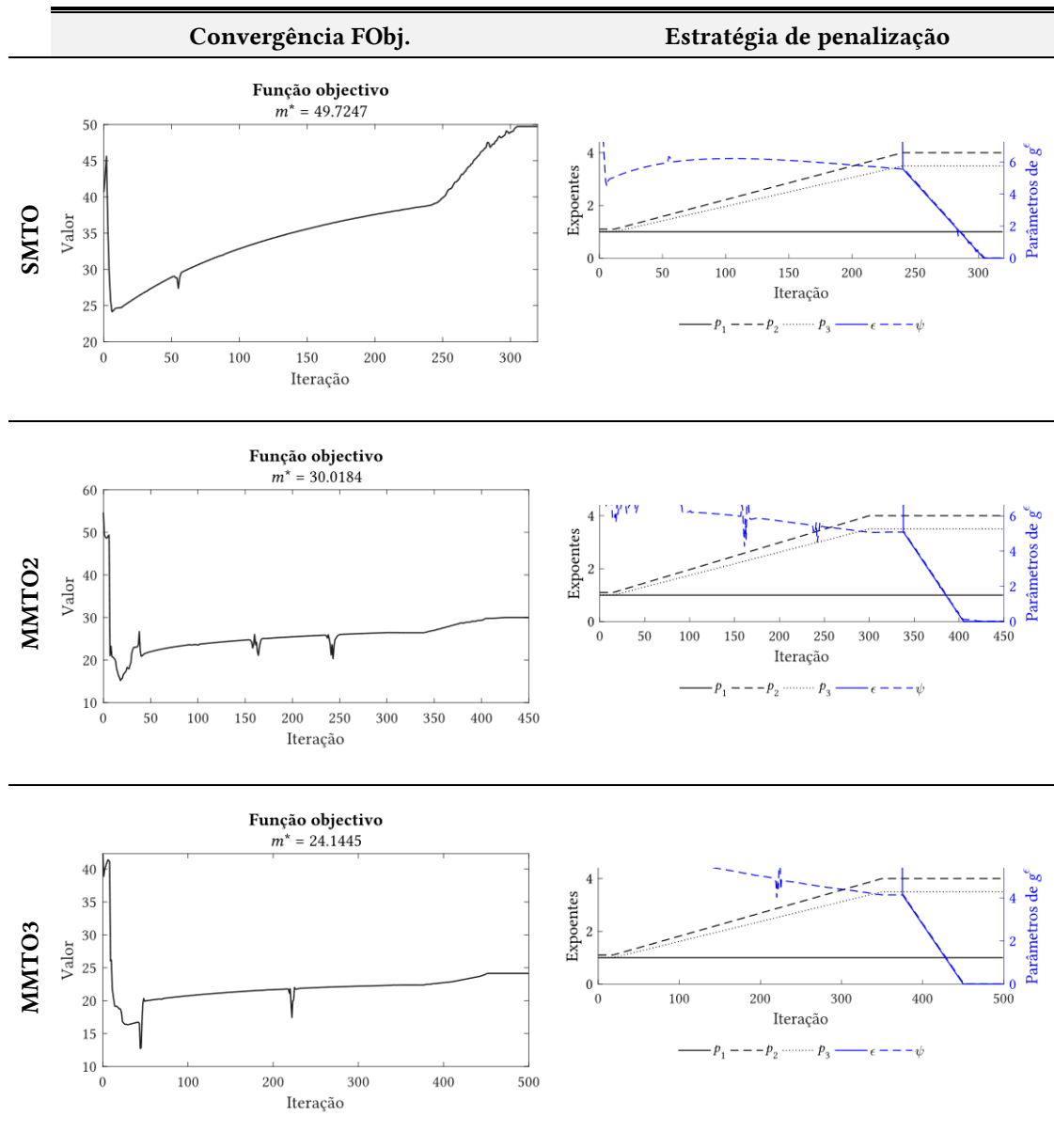


Tabela 6.24: Treliza de 110 barras – parâmetros da otimização.

Problema	m^*	$\Delta_{\%}(m^*)$	Viol. máx. const. no ponto ótimo	c_{MMA}	p_1	p_2	p_3	ε_{\min}	\mathbf{x}'
SMTO	49.7247	—	-1.00×10^{-3}	10^6	1	$1.1 \rightarrow 4$	$1 \rightarrow 3.5$	0.001	$x'_e = 0.5$
MMTO2	30.0184	-40%	-9.98×10^{-4}	10^8					$x'_{e,m} = 1/n^m$
MMTO3	24.1445	-51%	-1.00×10^{-3}	10^7					

Tabela 6.25: Treliza de 110 barras – convergência da função objectivo e estratégia de penalização.



CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

7.1 Conclusões

Esta dissertação teve como objectivo contribuir para o avanço do conhecimento científico através da apresentação de uma metodologia de optimização topológica baseada na variável densidade, com a capacidade de resolver problemas de minimização da massa de estruturas reticuladas com constrangimentos de tensão, considerando múltiplas fases de material.

Este estudo iniciou-se com uma revisão bibliográfica de conceitos de optimização topológica, relevantes no âmbito desta dissertação. No contexto dos métodos baseados na variável densidade, em primeiro lugar foi estudada a imposição de constrangimentos de tensão em problemas de optimização estrutural e os desafios inerentes à sua consideração, nomeadamente a sua natureza local, não linearidade e o fenómeno da singularidade. Dentro dos constrangimentos de tensão, foi feito um estudo aprofundado da dependência que estes apresentam relativamente às variáveis de projecto, o que permitiu definir um método analítico para o cálculo de sensibilidades (método adjunto) e assim aumentar a eficiência deste passo no processo de optimização.

Para estabelecer uma formulação que permitisse considerar várias fases de material foi necessário fazer uma revisão das leis de interpolação de material existentes e testá-las, o que permitiu avaliar as suas vantagens e desvantagens. Dada a sua baixa complexidade e facilidade de implementação, chegou-se à conclusão de que o modelo de interpolação DMO 1 seria o mais adequado. No entanto, foi necessário definir uma estratégia que impedisse o algoritmo de optimização de aceder às zonas da lei de interpolação onde as propriedades dos materiais disponíveis eram extrapoladas, o que resultaria num material fictício. Essa estratégia consistiu na consideração de um constrangimento adicional por elemento que impõe que o somatório das funções de peso nesse elemento é igual ou inferior à unidade. Devido ao facto destes constrangimentos dependerem linearmente das variáveis de projecto, o cálculo de sensibilidades pôde ser feito de forma puramente analítica e implementado com facilidade. Antes de proceder à formulação dos problemas definiram-se as classes de problemas que seriam resolvidas no âmbito desta

dissertação, nomeadamente, SMT0, MMTO2 e MMTO3. Deste modo, considerou-se a possibilidade de remover elementos estruturais em todos os problemas resolvidos, através da consideração de uma fase de vazio. Os problemas SMT0, MMTO2 e MMTO3 apresentam um grau crescente de complexidade, sendo que a progressão nestes problemas consiste no aumento do espaço de projecto através da consideração de fases de material sólido adicionais, até um máximo de 3 fases sólidas.

Com as classes de problemas a resolver definidas, formularam-se os problemas de minimização da massa com constrangimentos de tensão do ponto de vista discreto (D) com variáveis booleanas, dada a natureza da optimização topológica. Para que fosse possível utilizar um método baseado no gradiente, as variáveis booleanas foram substituídas por variáveis contínuas de densidade artificial, tendo-se assim formulado os problemas relaxados (R). Um problema associado à introdução de variáveis de densidade artificial está relacionado com facto de isso possibilitar que as variáveis de projecto tomem valores intermédios, o que conduz à selecção de fases de material que, embora resultem da interpolação das propriedades dos materiais existentes, não correspondem de forma precisa a nenhum dos materiais disponíveis para projecto. Assim sendo, nestes problemas, os valores intermédios de densidade são penalizados de forma implícita, através de expoentes de penalização nas funções de peso na lei de interpolação, fazendo com que soluções intermédias sejam pouco eficientes. Embora esta penalização implícita produza efeitos, não é totalmente eficaz na obtenção de soluções com variáveis de projecto nos seus valores limite, uma vez que em problemas de minimização da massa estas permitem um valor mais baixo da função objectivo. Nesse sentido, para que fosse possível fazer uma correspondência clara entre o valor das variáveis de projecto de um elemento com um material dentro do conjunto de materiais disponíveis, foi necessário considerar um constrangimento adicional que penaliza de forma explícita os valores intermédios de densidade. Deste modo, garante-se que no conjunto de soluções admissíveis todas as distribuições finais correspondem a materiais discretos. Com este aspecto tratado formularam-se os problemas relaxados com penalização explícita de densidades: T-SMT0 (RP) e T-MMTO (RP), tendo-se estipulado estas como as formulações finais.

Um aspecto crucial da metodologia que se desenvolveu está relacionado com a forma como as penalizações implícita e explícita de densidades intermédias são consideradas ao longo do problema. Nesta metodologia, os expoentes de penalização são aumentados de forma gradual desde um valor inicial até um valor final previamente estipulados, seguindo uma *continuation approach*. Caso se considerassem expoentes de penalização no seu valor final desde o início da optimização a probabilidade de o algoritmo ficar retido num mínimo local aumenta fortemente,

especialmente se se considerar como ponto de partida da optimização que todos os elementos se encontram com o material mais resistente. Assim, no início da optimização os expoentes começam com o valor 1 ou tão perto de 1 quanto possível, fazendo com que o problema esteja na sua forma não penalizada. Desta forma, todas funções estão tão suaves quanto possível, o que diminui a probabilidade de ocorrer uma convergência para um óptimo local. À medida que a optimização avança, os expoentes aumentam e o espaço de projecto vai perdendo a sua suavidade. No final da penalização implícita de densidades, entra a penalização explícita com a activação do constrangimento g^ε , que segue igualmente uma *continuation approach*. A justificação é semelhante, uma vez que uma redução gradual do parâmetro ε permite que a convergência para uma solução discreta se faça de forma suave e sem instabilidades numéricas.

Posto isto, esta metodologia foi testada com a resolução de 19 problemas de optimização distribuídos por 7 modelos numéricos de estruturas reticuladas, com recurso a um conjunto de programas desenvolvidos em linguagem MATLAB. Em todos os exemplos verificou-se uma redução da massa da estrutura na passagem do problema SMT0 para MMTO2 e, se aplicável, de MMTO2 para MMTO3, o que se justifica pelo facto de nestas passagens existir uma expansão do espaço de projecto e, consequentemente, do conjunto de soluções admissíveis. Outro factor que também foi notório nestas passagens foi o aumento do quociente $\sigma_{e,l}/\bar{\sigma}_e$, obtendo-se estruturas sucessivamente mais próximas de um *Fully Stress Design*. Em elementos onde este quociente é baixo passa a existir a possibilidade de associar materiais com massa e tensões admissíveis menores, obtendo-se estruturas mais eficientes. No limite, com um número infinito de fases de material distintas, o material em cada elemento seria tal que $\sigma_{e,l}/\bar{\sigma}_e = 1$, alcançando-se a estrutura mais eficiente possível. Um factor digno de nota foi o facto de todos os resultados obtidos se pautarem por distribuições de material totalmente discretas, sendo possível fazer uma atribuição inequívoca do material de cada elemento a partir do conjunto discreto de materiais disponíveis.

Havendo a imposição de constrangimentos de tensão (função manifestamente não linear), a escolha do ponto de partida quando se utiliza um método de optimização baseado no gradiente pode ter um papel preponderante na solução para a qual o algoritmo converge. Contudo, como em situações reais não se conhece *a priori* a solução do problema e na tentativa de uniformizar parâmetros, estipulou-se $\mathbf{x}' = 1/n^f$ nos problemas SMT0 e $\mathbf{x}' = 1/n^m$ nos problemas MMTO, de maneira a não favorecer nenhuma fase de material em detrimento de outras. Estas soluções iniciais permitiram obter bons resultados em todos os problemas à excepção de um, problema SMT0 da treliça de 3 barras. No entanto, como foi visto nas representações gráficas em 2.3.3.3 caso se parta dessa solução, o algoritmo converge para um óptimo local. Nesse sentido, \mathbf{x}' foi

ligeiramente modificado, o que permitiu alcançar a solução óptima global. Com este aspecto fica em aberto para trabalhos futuros uma comparação entre os pontos de partida considerados *standard* nesta dissertação e outros que resultem de modificações pontuais nas variáveis de projecto. Por exemplo, num problema com duas fases de material sólido, ao invés de se preencher o vector das variáveis de projecto com os valores 0.5, poder-se-ia preencher de forma alternada com os valores 0.25, 0.5 e 0.75.

Um outro aspecto está relacionado com o valor relativo entre os expoentes p_2 e p_3 , $p_2 - p_3$. Por forma a ultrapassar o fenómeno da singularidade com sucesso esta diferença deve ser sempre superior a 0. Mesmo que $p_2 - p_3$ seja 0 apenas nas iterações iniciais, constatou-se que isso condiciona bastante a trajectória que o algoritmo toma, uma vez que pode ser necessário aceder a uma zona degenerada do domínio logo no início da optimização. Para além disso, nos testes que se realizaram com esta diferença nula, o MMA apresentou instabilidades numéricas.

Apesar dos resultados obtidos não representarem isso, quando se considera a fase de vazio com um método baseado na variável densidade aplicado em estruturas reticuladas, existe a possibilidade de a estrutura óptima ser instável, *i.e.*, ser um mecanismo. Tal acontece porque a fase de vazio é considerada com um material muito flexível no contexto do problema. Este material, embora seja irrelevante para a contabilização da massa da estrutura e para a distribuição de tensões, é o suficiente para que o equilíbrio estático seja garantido e se alcancem estruturas com estas características. Este é um problema intrínseco aos métodos baseados na variável densidade aplicados em estruturas reticuladas, não se adaptando nesta dissertação nenhuma medida que o permita colmatar.

No geral, tentou-se manter os parâmetros da optimização tão uniformes quanto possível de problema para problema, contudo, em contextos futuros, fica sempre ao critério do projectista questionar a qualidade dos resultados obtidos e decidir se altera algum parâmetro para testar uma nova optimização, na expectativa de obter melhores resultados. Realça-se o papel preliminar que a optimização topológica desempenha no projecto moderno, servindo muitas vezes apenas para dar uma ideia básica do *layout* de uma estrutura ao projectista na fase conceptual de projecto. Não obstante, considera-se que os objectivos da dissertação foram alcançados, pois foi apresentada uma metodologia para a resolução de problemas que, até à data foram muito pouco explorados. Na sequência das conclusões apresentadas, os resultados obtidos foram satisfatórios.

7.2 Trabalhos futuros

Como trabalho futuro mais imediato tem-se, por exemplo, testar esta metodologia com treliças com um maior número de elementos. No decorrer desta dissertação, desenvolveu-se um programa em MATLAB (Anexo D) que, a partir das coordenadas de um conjunto de nós previamente estipulado e de um circuito de nós que delimita a estrutura, devolve as conectividades associadas à *ground structure* com o maior número de elementos possível, sem que existam elementos repetidos ou sobrepostos. Contudo, por razões de tempo, não houve a possibilidade de testar a viabilidade da metodologia proposta com estruturas desta complexidade.

Dada a forma generalizada como os problemas se encontram formulados e como os programas estão implementados, um próximo passo pode também ser a consideração de um número de fases de material sólido superior a 3. Para além disso, também existe a possibilidade de explorar problemas de *Multi Material Selection*. Nestes problemas, não existindo fase de vazio, a topologia da estrutura encontra-se definida *a priori* e os problemas a resolver são apenas de selecção de material.

Seria interessante programar o algoritmo SQP de forma a conseguir fixar o número de iterações para que fosse possível aplicar uma *continuation approach* com equidade. Poder-se-iam comparar os resultados obtidos com o SQP e com o MMA, bem como o custo computacional e, assim, tirar ilações acerca do algoritmo mais adequado para resolver este tipo de problema.

Mantendo-se o objectivo de obter estruturas com uma distribuição de material discreta, pode ser colocada a hipótese de acrescentar as áreas das secções transversais das barras ao conjunto das variáveis de projecto. Nessas condições, havendo um *trade-off* entre o material seleccionado e a área da secção de cada barra, seria possível obter uma estrutura tão leve quanto possível em FSD, sem que para isso fosse necessário admitir um número infinito de fases de material distintas.

Numa situação em que se pretenda uma estrutura com uma determinada massa e seja essencial reduzir picos de tensão, poder-se-ia formular o problema de minimização do valor máximo da tensão com um constrangimento na massa da estrutura. Nesta formulação o objectivo deixaria de ser encontrar a estrutura mais leve possível, pois a sua massa é imposta.

Embora o problema de minimização da *compliance* com constrangimento de massa já se encontre amplamente documentado na literatura e não apresente os mesmos desafios que o tipo de problema em estudo nesta dissertação, seria interessante comparar os resultados das duas formulações e verificar se nas formulações de maximização da rigidez a tensão admissível dos materiais disponíveis são respeitadas em todos os elementos. Ainda no âmbito da rigidez e

atendendo às práticas comuns no projecto corrente de estruturas, seria interessante adicionar constrangimentos de deslocamento à formulação proposta neste trabalho, uma vez que, muitas vezes, as deformações são também critérios de projecto restritivos.

Atendendo ao carácter exploratório desta dissertação, os problemas resolvidos não admitem a possibilidade de ocorrência do fenómeno de encurvadura. Devido à sua esbeltez, as barras à compressão podem encurvar ou instabilizar, o que pode levar à ruína estrutura. Por vezes, no projecto de estruturas, os critérios de instabilidade são mais restritivos que os critérios de cedência, pelo que é relevante considerar constrangimentos de encurvadura em trabalhos futuros.

Por último, podem ser exploradas técnicas de processamento paralelo, com vista a reduzir os tempos de optimização. Nestas condições, melhora-se a eficiência computacional e poderão ser resolvidos problemas de elasticidade 2D ou 3D, que são problemas de uma dimensão manifestamente superior, exigindo um esforço computacional também superior.

Bibliografia

- [1] W. Achtziger e C. Kanzow, «Mathematical programs with vanishing constraints: optimality conditions and constraint qualifications», *Math. Program.*, vol. 114, n. 1, pp. 69–99, Jul. 2008.
- [2] G. Allaire e G. A. Francfort, «A Numerical Algorithm for Topology and Shape Optimization», em *Topology Design of Structures*, Dordrecht: Springer Netherlands, 1993, pp. 239–248.
- [3] G. Allaire, F. Jouve, e A.-M. Toader, «Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method», *J. Comput. Phys.*, vol. 194, n. 1, pp. 363–393, Fev. 2004.
- [4] G. Allaire e R. V. Kohn, «Topology Optimization and Optimal Shape Design Using Homogenization», em *Topology Design of Structures*, Dordrecht: Springer Netherlands, 1993, pp. 207–218.
- [5] N. Andrup, «The A350 up close», *Lufthansa Magazin*. [Em linha]. Disponível em: <https://magazin.lufthansa.com/xx/en/fleet/a350-en/the-a350-up-close/>. [Acedido: 26-Jul-2019].
- [6] J. H. Argyris e S. Kelsey, «Energy Theorems and Structural Analysis». Butterworth, London, 1960.
- [7] J. S. Arora, *Introduction to Optimum Design*, 4th ed. Academic Press, Inc., 2017.
- [8] ASM International, *ASM Metal's Handbook*, 10th ed., vol. 2. ASM International, 1990.
- [9] M. P. Bendsøe, «Optimal shape design as a material distribution problem», *Struct. Optim.*, vol. 1, n. 4, pp. 193–202, Dez. 1989.
- [10] M. P. Bendsøe e N. Kikuchi, «Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method», *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 71, n. 2, pp. 197–224, Nov. 1988.
- [11] M. P. Bendsøe e O. Sigmund, *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*, 2nd ed. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [12] M. P. Bendsøe e O. Sigmund, «Material interpolation schemes in topology optimization», *Arch. Appl. Mech. (Ingenieur Arch.)*, vol. 69, n. 9–10, pp. 635–654, Nov. 1999.
- [13] B. Bourdin e A. Chambolle, «Design-dependent loads in topology optimization», *ESAIM Control. Optim. Calc. Var.*, vol. 9, pp. 19–48, Jan. 2003.
- [14] M. Bruggi, «On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 36, n. 2, pp. 125–141, Ago. 2008.
- [15] M. Bruggi e P. Duysinx, «Topology optimization for minimum weight with compliance and stress constraints», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 46, n. 3, pp. 369–384, Set. 2012.
- [16] M. Bruggi e P. Venini, «A mixed FEM approach to stress-constrained topology optimization», *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 73, n. 12, pp. 1693–1714, Mar. 2008.
- [17] G. D. Cheng e X. Guo, « ϵ -relaxed approach in structural topology optimization», *Struct. Optim.*, vol. 13, n. 4, pp. 258–266, 1997.
- [18] G. Cheng e Z. Jiang, «Study on topology optimization with stress constraints», *Eng. Optim.*, vol. 20, n. 2, pp. 129–148, Nov. 1992.
- [19] S. Chu, L. Gao, M. Xiao, Z. Luo, e H. Li, «Stress-based multi-material topology optimization of compliant mechanisms», *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 113, n. 7, pp. 1021–1044, Fev. 2018.
- [20] S. Chu, M. Xiao, L. Gao, e H. Li, «A level set-based method for stress-constrained multimaterial topology optimization of minimizing a global measure of stress», *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 117, n. 7, pp. 800–818, Fev. 2019.
- [21] R. W. Clough, «The finite element method in plane stress analysis», *J. Struct. Div. ASCE, Proc. 2nd Conf. Electron. Comput.*, pp. 345–378, 1960.
- [22] P. G. Coelho, «A few notes for TAME classes». Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2017.

-
- [23] P. G. Coelho, J. M. Guedes, e J. B. Cardoso, «Topology optimization of cellular materials with periodic microstructure under stress constraints», *Struct. Multidiscip. Optim.*, Set. 2018.
 - [24] M. Collet, L. Noël, M. Bruggi, e P. Duysinx, «Topology optimization for microstructural design under stress constraints», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 58, n. 6, pp. 2677–2695, Dez. 2018.
 - [25] C. Conlan-Smith e K. A. James, «A stress-based topology optimization method for heterogeneous structures», *Struct. Multidiscip. Optim.*, Fev. 2019.
 - [26] R. Courant, «Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations», *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 49, pp. 1–23, 1943.
 - [27] G. B. Dantzig e M. N. Thapa, *Linear Programming*, 1st ed. New York: Springer-Verlag, 1997.
 - [28] J. D. Deaton e R. V. Grandhi, «A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 49, n. 1, pp. 1–38, Jan. 2014.
 - [29] N. P. van Dijk, K. Maute, M. Langelaar, e F. van Keulen, «Level-set methods for structural topology optimization: a review», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 48, n. 3, pp. 437–472, Set. 2013.
 - [30] W. S. Dorn, R. E. Gomory, e H. J. Greenberg, «Automatic design of optimal structures», *J. Mech.*, vol. 3, pp. 25–52, 1964.
 - [31] P. Duysinx e M. P. Bendsøe, «Topology optimization of continuum structures with local stress constraints», *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 43, n. 8, pp. 1453–1478, Dez. 1998.
 - [32] P. Duysinx, L. Van Miegroet, E. Lemaire, O. Brûls, e M. Bruyneel, «Topology and generalized shape optimization: Why stress constraints are so important?», *Int. J. Simul. Multidiscip. Des. Optim.*, vol. 2, n. 4, pp. 253–258, Dez. 2008.
 - [33] P. Duysinx e O. Sigmund, «New developments in handling stress constraints in optimal material distribution», em *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, 1998.
 - [34] A. Francavilla, C. V. Ramakrishnan, e O. C. Zienkiewicz, «Optimization of shape to minimize stress concentration», *Strain Anal. Eng. Des.*, vol. 10, n. 2, pp. 63–70, 1975.
 - [35] T. Gao e W. Zhang, «A mass constraint formulation for structural topology optimization with multiphase materials», *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 88, n. 8, pp. 774–796, Nov. 2011.
 - [36] L. V. Gibiansky e O. Sigmund, «Multiphase composites with extremal bulk modulus», *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 48, n. 3, pp. 461–498, Mar. 2000.
 - [37] F. Glover, «Future paths for integer programming and links to artificial intelligence», *Comput. Oper. Res.*, vol. 13, n. 5, pp. 533–549, Jan. 1986.
 - [38] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, 1st ed. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1989.
 - [39] J. M. Guedes e N. Kikuchi, «Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods», *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 83, n. 2, pp. 143–198, Out. 1990.
 - [40] C. M. Guilherme e J. O. Fonseca, «Topology optimization of continuum structures with epsilon-relaxed stress constraints», em *International Symposium on Solid Mechanics*, 2007.
 - [41] X. Guo, W. S. Zhang, M. Y. Wang, e P. Wei, «Stress-related topology optimization via level set approach», *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 200, n. 47–48, pp. 3439–3452, Nov. 2011.
 - [42] X. Guo, W. Zhang, e W. Zhong, «Stress-related topology optimization of continuum structures involving multi-phase materials», *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 268, pp. 632–655, Jan. 2014.
 - [43] R. T. Haftka e R. V. Grandhi, «Structural shape optimization - A survey», *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 57, n. 1, pp. 91–106, Ago. 1986.

- [44] R. T. Haftka e Z. Gürdal, *Elements of Structural Optimization*, vol. 11. Dordrecht: Springer Netherlands, 1992.
- [45] P. Hajela e E. Lee, «Genetic algorithms in truss optimization», *Int. J. Solids Struct.*, vol. 32, n. 22, pp. 3341–3357, 1995.
- [46] J. H. Holland, *Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*, 1st ed. Oxford: University of Michigan Press, 1975.
- [47] A. Hrenikoff, «Solution of problems in elasticity by the framework method», *J. Appl. Mech.*, vol. 8, pp. 169–175, 1941.
- [48] C. F. Hvejsel e E. S. Lund, «Material interpolation schemes for unified topology and multi-material optimization», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 43, n. 6, pp. 811–825, 2011.
- [49] C. F. Hvejsel, E. Lund, e M. Stolpe, «Optimization strategies for discrete multi-material stiffness optimization», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 44, n. 2, pp. 149–163, Ago. 2011.
- [50] J. Kato, A. Lipka, e E. Ramm, «Multiphase material optimization for fiber reinforced composites with strain softening», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 39, n. 1, pp. 63–81, Jul. 2009.
- [51] G. J. Kennedy, «A full-space barrier method for stress-constrained discrete material design optimization», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 54, n. 3, pp. 619–639, Set. 2016.
- [52] U. Kirsch, «On singular topologies in optimum structural design», *Struct. Optim.*, vol. 2, n. 3, pp. 133–142, 1990.
- [53] U. Kirsch, *Structural Optimization*, 3rd ed. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1993.
- [54] U. Kirsch, «Effect of Compatibility and Prestressing on Optimized Trusses», *J. Struct. Eng.*, vol. 115, n. 3, pp. 724–737, Mar. 1989.
- [55] G. Kreisselmeier e R. Steinhauser, «Systematic Control Design by Optimizing a Vector Performance Index», *IFAC Proc. Vol.*, vol. 12, n. 7, pp. 113–117, Set. 1979.
- [56] L. Krog, A. Tucker, M. Kemp, e R. Boyd, «Topology Optimisation of Aircraft Wing Box Ribs», em *10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, 2004.
- [57] C. Le, J. Norato, T. Bruns, C. Ha, e D. Tortorelli, «Stress-based topology optimization for continua», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 41, n. 4, pp. 605–620, Abr. 2010.
- [58] R. A. de C. Leal, «Comparação entre um método aproximado e um método numérico para cálculo de deformações em treliças e otimização dessas estruturas», Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2015.
- [59] E. Lee, K. A. James, e J. R. R. A. Martins, «Stress-constrained topology optimization with design-dependent loading», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 46, n. 5, pp. 647–661, Nov. 2012.
- [60] D. Li e I. Y. Kim, «Multi-material topology optimization for practical lightweight design», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 58, n. 3, pp. 1081–1094, Set. 2018.
- [61] K. Long, X. Wang, e X. Gu, «Local optimum in multi-material topology optimization and solution by reciprocal variables», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 57, n. 3, pp. 1283–1295, Mar. 2018.
- [62] S. Lu, H. Ma, L. Xin, e W. Zuo, «Lightweight design of bus frames from multi-material topology optimization to cross-sectional size optimization», *Eng. Optim.*, vol. 51, n. 6, pp. 961–977, Jun. 2019.
- [63] E. Lund, «Discrete Material and Thickness Optimization of laminated composite structures including failure criteria», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 57, n. 6, pp. 2357–2375, Jun. 2018.
- [64] E. Lund e J. Stegmann, «On structural optimization of composite shell structures using a discrete constitutive parametrization», *Wind Energy*, vol. 8, n. 1, pp. 109–124, Jan. 2005.
- [65] Y. Luo e Z. Kang, «Topology optimization of continuum structures with Drucker–Prager yield

- stress constraints», *Comput. Struct.*, vol. 90–91, pp. 65–75, Jan. 2012.
- [66] J. C. Maxwell, «On reciprocal figures, frames and diagrams of forces», *Sci. Pap.*, vol. 2, pp. 175–177, 1890.
- [67] A. G. M. Michell, «The limit of economy of material in frame structures», *Philosophical Mag.*, vol. 6, n. 8, pp. 589–597, 1904.
- [68] H. P. Mlejnek, «Some aspects of the genesis of structures», *Struct. Optim.*, vol. 5, n. 1–2, pp. 64–69, Mar. 1992.
- [69] B. Niu, N. Olhoff, E. Lund, e G. Cheng, «Discrete material optimization of vibrating laminated composite plates for minimum sound radiation», *Int. J. Solids Struct.*, vol. 47, n. 16, pp. 2097–2114, Ago. 2010.
- [70] D. B. Palma, «Análise e otimização de microestruturas com critérios de tensão usando cálculo paralelo». Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, p. 60, 2018.
- [71] J. París, F. Navarrina, I. Colominas, e M. Casteleiro, «Topology optimization of continuum structures with local and global stress constraints», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 39, n. 4, pp. 419–437, Out. 2009.
- [72] J. T. Pereira, E. A. Fancello, e C. S. Barcellos, «Topology optimization of continuum structures with material failure constraints», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 26, n. 1–2, pp. 50–66, Jan. 2004.
- [73] A. Ramani, «Multi-material topology optimization with strength constraints», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 43, n. 5, pp. 597–615, Mai. 2011.
- [74] J. N. Reddy, *Introduction to the Finite Element Method*, 4th ed. McGraw-Hill, 2019.
- [75] A. Remouchamps, M. Bruyneel, C. Fleury, e S. Grihon, «Application of a bi-level scheme including topology optimization to the design of an aircraft pylon», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 44, n. 6, pp. 739–750, Dez. 2011.
- [76] G. I. N. Rozvany, «Some shortcomings in Michell's truss theory», *Struct. Optim.*, vol. 12, n. 4, pp. 244–250, Dez. 1996.
- [77] G. I. N. Rozvany, «Exact analytical solutions for some popular benchmark problems in topology optimization», *Struct. Optim.*, vol. 15, n. 1, pp. 42–48, Fev. 1998.
- [78] G. I. N. Rozvany, «On design-dependent constraints and singular topologies», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 21, n. 2, pp. 164–172, 2001.
- [79] G. I. N. Rozvany e T. Birker, «On singular topologies in exact layout optimization», *Struct. Optim.*, vol. 8, n. 4, pp. 228–235, 1994.
- [80] E. D. Sanders, M. A. Aguiló, e G. H. Paulino, «Multi-material continuum topology optimization with arbitrary volume and mass constraints», *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 340, pp. 798–823, Out. 2018.
- [81] K. Schittkowski, «NLPQL: A fortran subroutine solving constrained nonlinear programming problems», *Ann. Oper. Res.*, vol. 5, n. 1–4, pp. 485–500, Mai. 1986.
- [82] L. A. Schmit, «Structural design by systematic synthesis», em *Proceedings 2nd Conference on Electronic Computation*, 1960, pp. 105–132.
- [83] J. A. Sethian e A. Wiegmann, «Structural Boundary Design via Level Set and Immersed Interface Methods», *J. Comput. Phys.*, vol. 163, n. 2, pp. 489–528, Set. 2000.
- [84] O. Sigmund e M. P. Bendsøe, «Topology optimization - from airplanes to nanooptics», K. Stubbjær e T. Kortenbach, Eds. Kgs. Lyngby: Technical University of Denmark (DTU), 2004, pp. 40–51 BT-BRIDGING from technology to society.
- [85] O. Sigmund e K. Maute, «Topology optimization approaches», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 48, n. 6, pp. 1031–1055, Dez. 2013.

- [86] O. Sigmund e S. Torquato, «Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method», *Mech. Phys. Solids*, vol. 45, n. 6, pp. 1037–1067, 1997.
- [87] J. Sokolowski e A. Zochowski, «On the Topological Derivative in Shape Optimization», *SIAM J. Control Optim.*, vol. 37, n. 4, pp. 1251–1272, Jan. 1999.
- [88] S. N. Sørensen, R. Sørensen, e E. Lund, «DMTO – a method for Discrete Material and Thickness Optimization of laminated composite structures», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 50, n. 1, pp. 25–47, Jul. 2014.
- [89] J. Stegmann, «Analysis and Optimization of Laminated Composite Shell Structures», Aalborg University, 2004.
- [90] J. Stegmann e E. Lund, «Discrete material optimization of general composite shell structures», *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 62, n. 14, pp. 2009–2027, Abr. 2005.
- [91] M. Stolpe, «Fail-safe truss topology optimization», *Struct. Multidiscip. Optim.*, Mai. 2019.
- [92] M. Stolpe e J. Stegmann, «A Newton method for solving continuous multiple material minimum compliance problems», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 35, n. 2, pp. 93–106, Fev. 2008.
- [93] M. Stolpe e K. Svanberg, «An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 22, n. 2, pp. 116–124, Set. 2001.
- [94] M. Stolpe e K. Svanberg, «On the trajectories of the epsilon-relaxation approach for stress-constrained truss topology optimization», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 21, n. 2, pp. 140–151, Abr. 2001.
- [95] K. Svanberg, «On local and global minima in structural optimization», *New Dir. Optim. Struct. Des.*, pp. 327–341, 1984.
- [96] K. Svanberg, «The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization», *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 24, n. 2, pp. 359–373, Fev. 1987.
- [97] G. Sved e Z. Ginos, «Structural optimization under multiple loading», *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 10, n. 10, pp. 803–805, Out. 1968.
- [98] R. Tavakoli e S. M. Mohseni, «Alternating active-phase algorithm for multimaterial topology optimization problems: a 115-line MATLAB implementation», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 49, n. 4, pp. 621–642, Abr. 2014.
- [99] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, e L. J. Topp, «Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures», *J. Aeronaut. Sci.*, vol. 23, n. 9, pp. 805–823, Set. 1956.
- [100] A. Verbart, «Topology Optimization with Stress Constraints». TU Delft, p. 137, 2015.
- [101] A. Verbart, M. Langelaar, e F. van Keulen, «Damage approach: A new method for topology optimization with local stress constraints», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 53, n. 5, pp. 1081–1098, 2016.
- [102] M. Y. Wang e X. Wang, «“Color” level sets: a multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials», *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 193, n. 6–8, pp. 469–496, Fev. 2004.
- [103] M. Y. Wang, X. Wang, e D. Guo, «A level set method for structural topology optimization», *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 192, n. 1–2, pp. 227–246, Jan. 2003.
- [104] Y. Wang, Z. Luo, Z. Kang, e N. Zhang, «A multi-material level set-based topology and shape optimization method», *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 283, pp. 1570–1586, Jan. 2015.
- [105] C. Woischwill e I. Y. Kim, «Multimaterial multijoint topology optimization», *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 115, n. 13, pp. 1552–1579, Set. 2018.
- [106] H. Zhang, Y. Luo, e Z. Kang, «Bi-material microstructural design of chiral auxetic metamaterials using topology optimization», *Compos. Struct.*, vol. 195, pp. 232–248, Jul. 2018.

- [107] W. S. Zhang, X. Guo, M. Y. Wang, e P. Wei, «Optimal topology design of continuum structures with stress concentration alleviation via level set method», *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 93, n. 9, pp. 942–959, Mar. 2013.
- [108] Y. Zhang, M. Xiao, H. Li, L. Gao, e S. Chu, «Multiscale concurrent topology optimization for cellular structures with multiple microstructures based on ordered SIMP interpolation», *Comput. Mater. Sci.*, vol. 155, pp. 74–91, Dez. 2018.
- [109] M. Zhou e G. I. N. Rozvany, «The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization», *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 89, n. 1–3, pp. 309–336, Ago. 1991.
- [110] S. Zhou e M. Y. Wang, «Multimaterial structural topology optimization with a generalized Cahn–Hilliard model of multiphase transition», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 33, n. 2, pp. 89–111, Dez. 2006.
- [111] J.-H. Zhu, W.-H. Zhang, e L. Xia, «Topology Optimization in Aircraft and Aerospace Structures Design», *Arch. Comput. Methods Eng.*, vol. 23, n. 4, pp. 595–622, Dez. 2016.
- [112] O. C. Zienkiewicz e J. S. Campbell, *Shape optimization and sequential linear programming, in Optimum Structural Design - Theory and Applications*. 1973.
- [113] W. Zuo e K. Saitou, «Multi-material topology optimization using ordered SIMP interpolation», *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 55, n. 2, pp. 477–491, Fev. 2017.
- [114] «MatWeb: Material Property Data». [Em linha]. Disponível em: <http://www.matweb.com/>.

Anexos

Anexo A – Tempos de optimização do MMA

O tempo decorrido em cada optimização depende fortemente das especificações do computador utilizado. Neste caso, as optimizações realizadas com o algoritmo MMA foram feitas num computador portátil MSI GS63VR 7RF Stealth Pro equipado com um processador Intel Core i7-7700HQ @ 2.80 GHz, 16.0 GB de memória RAM e com o sistema operativo Windows 10 Home (64 bits) instalado num disco SSD de 512 GB.

Para além das características da máquina utilizada, os tempos de optimização do MMA são influenciados pelo número de variáveis de projecto, número de constrangimentos, número de iterações e quão violados são os constrangimentos ao longo da optimização. As análises de elementos finitos e, em particular, o cálculo de sensibilidades é fundamentalmente influenciado pelo número de variáveis e de constrangimentos. Na Tabela A.1 apresentam-se os parâmetros anteriormente referidos e o tempo de optimização de cada problema.

Tabela A.1: Tempos de optimização dos problemas resolvidos com o MMA.

Exemplo (nº barras)	Problema	n^v	$n^c_{tensão}$	n^c_{total}	n^{iter}	Δt_{MMA} (mm:ss)
3	SMT0	3	3	4	100	00:37
	MMTO2	6	3	7	200	00:45
10	SMT0	10	10	11	200	01:05
	MMTO2	20	10	21	200	01:25
	MMTO3	30	10	21	200	01:25
11	SMT0	11	22	23	200	01:04
	MMTO2	22	22	34	200	01:14
21	SMT0	11	11	12	200	01:08
	MMTO2	22	11	23	450	03:04
	MMTO3	33	11	23	450	03:08
26	SMT0	26	26	27	200	01:35
	MMTO2	52	26	53	450	02:18
	MMTO3	78	26	53	450	05:49
36	SMT0	36	36	37	200	01:27
	MMTO2	72	36	73	450	03:42
	MMTO3	108	36	73	200	01:53
110	SMT0	55	55	56	320	04:31
	MMTO2	110	55	111	450	09:08
	MMTO3	165	55	111	500	10:17

Anexo B – Históricos da violação máxima dos constrangimentos

Tabela B.1: Históricos da violação máxima dos constrangimentos dos problemas das treliças de 3 e 11 barras.

Treliça de 3 barras

Violação máxima dos constrangimentos

-5.18e-05

Plot showing the maximum constraint violation (Valor) versus iteration (Iteração) for the SMT0 Treliça de 3 barras problem. The y-axis ranges from 0 to 8, and the x-axis ranges from 0 to 100. The violation is near zero until iteration 90, where it spikes sharply to approximately 8.

Treliça de 11 barras

Violação máxima dos constrangimentos

-4.75e-05

Plot showing the maximum constraint violation (Valor) versus iteration (Iteração) for the SMT0 Treliça de 11 barras problem. The y-axis ranges from 0 to 10, and the x-axis ranges from 0 to 200. The violation is near zero until iteration 180, where it spikes sharply to approximately 10.

Violação máxima dos constrangimentos

1.12e-04

Plot showing the maximum constraint violation (Valor) versus iteration (Iteração) for the MMTO2 Treliça de 3 barras problem. The y-axis ranges from -0.2 to 1.2, and the x-axis ranges from 0 to 200. The violation is near zero until iteration 180, where it spikes sharply to approximately 1.1.

Violação máxima dos constrangimentos

-1.05e-03

Plot showing the maximum constraint violation (Valor) versus iteration (Iteração) for the MMTO2 Treliça de 11 barras problem. The y-axis ranges from 0 to 4, and the x-axis ranges from 0 to 200. The violation is near zero until iteration 180, where it spikes sharply to approximately 3.2.

Tabela B.2: Históricos da violação máxima dos constrangimentos dos problemas das treliças de 10 e 21 barras.

	Treliça de 10 barras	Treliça de 21 barras
SMTO	<div>Violação máxima dos constrangimentos -1.12e-03</div>	<div>Violação máxima dos constrangimentos -1.00e-03</div>
MMTO2	<div>Violação máxima dos constrangimentos -1.08e-03</div>	<div>Violação máxima dos constrangimentos -2.11e-04</div>
MMTO3	<div>Violação máxima dos constrangimentos -1.06e-03</div>	<div>Violação máxima dos constrangimentos -1.01e-03</div>

Tabela B.3: Históricos da violação máxima dos constrangimentos dos problemas das treliças de 10 e 21 barras.

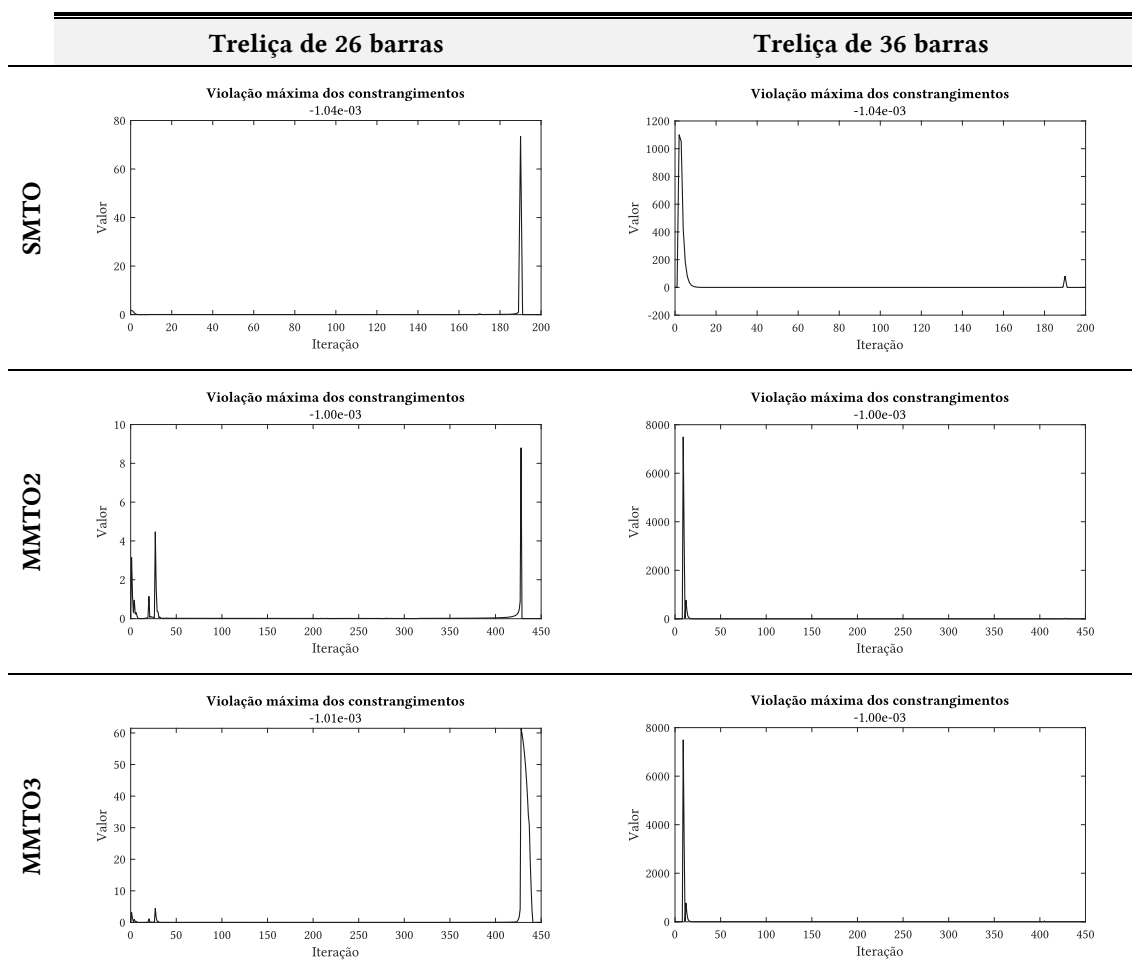
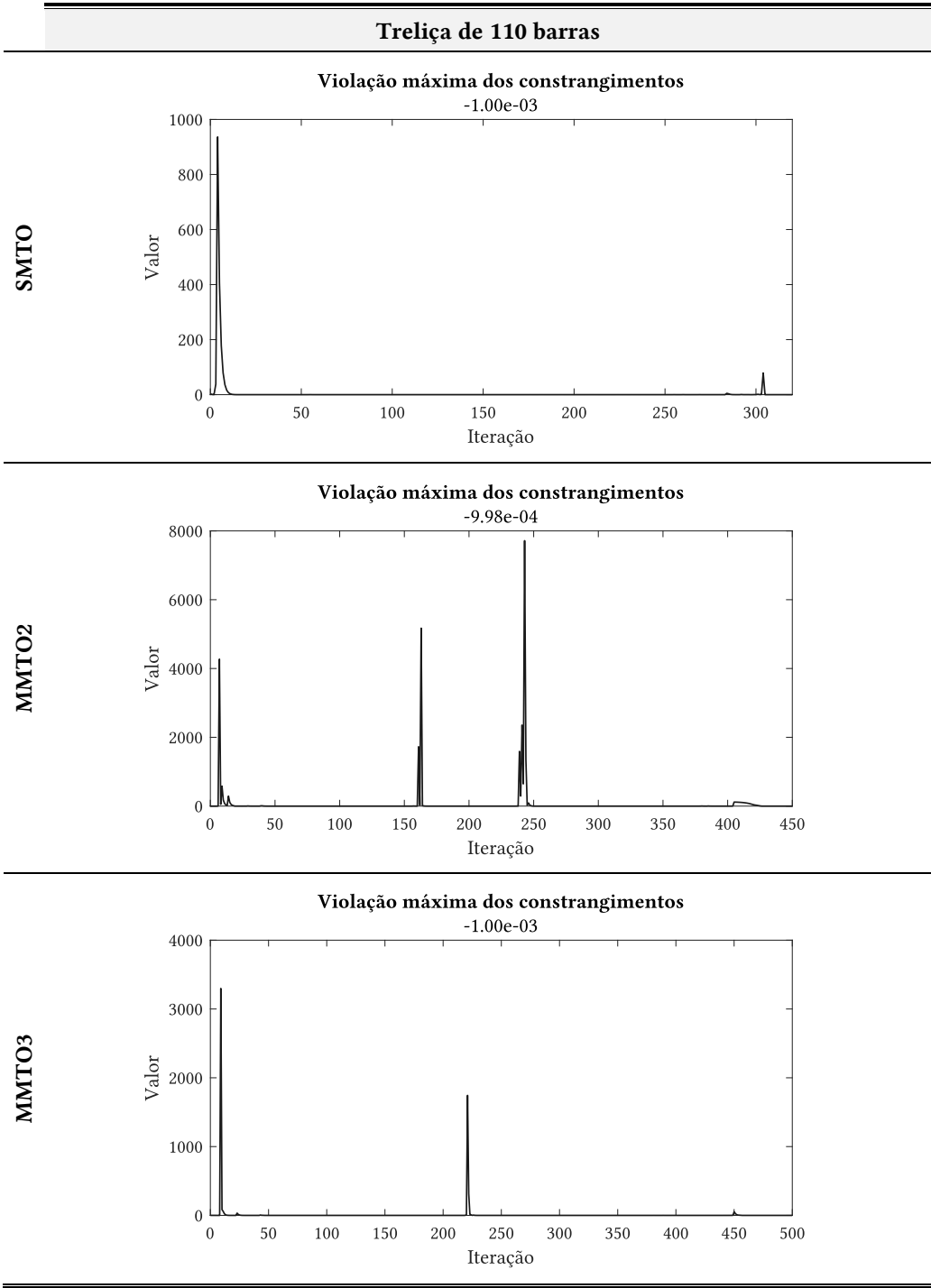


Tabela B.4: Históricos da violação máxima dos constrangimentos dos problemas da treliça de 110 barras.



Anexo C – Estratégias de penalização consideradas nos problemas de otimização

Tabela C.1: Parâmetros das estratégias de penalização dos problemas das treliças de 3, 10, 11 e 21 barras.

	3 barras		10 barras			11 barras		21 barras		
	SMT0	MMTO2	SMT0	MMTO2	MMTO3	SMT0	MMTO2	SMT0	MMTO2	MMTO3
I_1	75	150	150	150	150	150	150	150	300	300
I_2	25	50	50	50	50	50	50	50	150	150
n^{iter}	100	200	200	200	200	200	200	200	450	450
$\delta_{\%}$	0.05	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
i_{start}^E	$0.80 n^{iter}$	$0.75 n^{iter}$	$0.80 n^{iter}$	$0.80 n^{iter}$	$0.80 n^{iter}$	$0.80 n^{iter}$	$0.80 n^{iter}$	$0.80 n^{iter}$	$0.80 n^{iter}$	$0.75 n^{iter}$
i_{end}^E	$0.90 n^{iter}$	$0.95 n^{iter}$	$0.95 n^{iter}$	$0.95 n^{iter}$	$0.95 n^{iter}$	$0.95 n^{iter}$	$0.95 n^{iter}$	$0.95 n^{iter}$	$0.95 n^{iter}$	$0.95 n^{iter}$
p_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
p_2	$1.2 \rightarrow 4$	$1.2 \rightarrow 4$	$1.1 \rightarrow 4$	$1.1 \rightarrow 4$	$1.1 \rightarrow 4$	$1.1 \rightarrow 4$	$1.1 \rightarrow 4$	$1.1 \rightarrow 4$	$1.1 \rightarrow 4$	$1.1 \rightarrow 4$
p_3	$1 \rightarrow 3.5$	$1 \rightarrow 3.5$	$1 \rightarrow 3.5$	$1 \rightarrow 3.5$	$1 \rightarrow 3.5$	$1 \rightarrow 3.5$	$1 \rightarrow 3.5$	$1 \rightarrow 3.5$	$1 \rightarrow 3.5$	$1 \rightarrow 3.5$

Tabela C.2: Parâmetros das estratégias de penalização dos problemas das treliças de 26, 36 e 110 barras.

	26 barras			36 barras			110 barras		
	SMT0	MMTO2	MMTO3	SMT0	MMTO2	MMTO3	SMT0	MMTO2	MMTO3
I_1	150	300	300	150	300	150	240	300	350
I_2	50	150	150	50	150	50	80	150	150
n^{iter}	200	450	450	200	450	200	320	450	500
$\delta_{\%}$	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
i_{start}^E	$0.80 n^{iter}$	$0.75 n^{iter}$	$0.70 n^{iter}$	$0.80 n^{iter}$	$0.70 n^{iter}$	$0.80 n^{iter}$	$0.75 n^{iter}$	$0.75 n^{iter}$	$0.75 n^{iter}$
i_{end}^E	$0.95 n^{iter}$	$0.95 n^{iter}$	$0.95 n^{iter}$	$0.95 n^{iter}$	$0.90 n^{iter}$	$0.95 n^{iter}$	$0.95 n^{iter}$	$0.90 n^{iter}$	$0.90 n^{iter}$
p_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
p_2	$1.1 \rightarrow 4$	$1.05 \rightarrow 4$	$1.05 \rightarrow 4$	$1.1 \rightarrow 4$	$1.05 \rightarrow 4$	$1.1 \rightarrow 4$	$1.1 \rightarrow 4$	$1.1 \rightarrow 4$	$1.1 \rightarrow 4$
p_3	$1 \rightarrow 3.5$	$1 \rightarrow 3.5$	$1 \rightarrow 3.5$	$1 \rightarrow 3.5$	$1 \rightarrow 3.5$	$1 \rightarrow 3.5$	$1 \rightarrow 3.5$	$1 \rightarrow 3.5$	$1 \rightarrow 3.5$

Anexo D– Código do programa GroundStructure.m

```
function e_nodes = GroundStructure(n_coord,circuito)

    clear e_nodes

    % Numero de nos
    nnodes = size(n_coord,1);

    xv = zeros(1,length(circuito));
    yv = zeros(1,length(circuito));

    % Define poligono dentro do qual se admitem elementos
    for i = 1:length(circuito)
        xv(i) = n_coord(circuito(i),1);
        yv(i) = n_coord(circuito(i),2);
    end

    % Numero maximo de elementos nao repetidos
    contador = 0;
    nelem = 0;
    for n = 1:nnodes
        nelem = nelem + (nnodes-1) - contador;
        contador = contador + 1;
    end
    e_nodes = zeros(nelem,2);
    contador = 0;

    % ..... Cria todos os elementos possiveis sem repeticoes
    for n = 1:nnodes
        for nn = 1:nnodes
            if n < nn
                contador = contador + 1;
                e_nodes(contador,:) = [n,nn];
            end
        end
    end

    % ..... Elimina elementos que estao fora do poligono admissivel
    delete_elem = 0;
    for e = 1:nelem
        inc = 0;
        point = zeros(101,2);
        for i = 1:101
            inc = (i-1)*0.01;
            point(i,1) = n_coord(e_nodes(e,1),1) + inc*(n_coord(e_nodes(e,2),1) - n_coord(e_nodes(e,1),1));
            point(i,2) = n_coord(e_nodes(e,1),2) + inc*(n_coord(e_nodes(e,2),2) - n_coord(e_nodes(e,1),2));
        end
        valida = inpolygon(point(:,1),point(:,2),xv,yv);
        if sum(valida) ~= size(point,1)
            if delete_elem(1) == 0
                delete_elem(1) = e;
            else
                delete_elem(length(delete_elem)+1) = e;
            end
        end
    end
    if delete_elem ~= 0
        e_nodes(delete_elem,:) = [];
    end

    % ..... Elimina elementos sobrepostos

    L = zeros(size(e_nodes,1),1);
    C = zeros(size(e_nodes,1),1);
    S = zeros(size(e_nodes,1),1);
```

```

for e = 1:size(e_nodes,1)
    % Calcula o comprimento dos elementos
    L(e) = sqrt((n_coord(e_nodes(e,2),1)-n_coord(e_nodes(e,1),1))^2+...
        (n_coord(e_nodes(e,2),2)-n_coord(e_nodes(e,1),2))^2);
    % Calcula o cos do angulo
    C(e) = (n_coord(e_nodes(e,2),1)-n_coord(e_nodes(e,1),1))/L(e);
    % Calcula o sin do angulo
    S(e) = (n_coord(e_nodes(e,2),2)-n_coord(e_nodes(e,1),2))/L(e);
end

% Matriz com sin, cos e comprimento de cada elemento
props(:,1) = C;
props(:,2) = S;
props(:,3) = L;

numbers = unique(e_nodes(:,1)); % regista os nos a partir dos quais se criam elementos
nao repetidos
freq = hist(e_nodes(:,1),numbers); % regista o numero de elementos nao repetidos que sai de
cada um desses nos

elemcount = 0; % Contador de elementos ja analisados
delete_elem = 0; % Indices de elementos a remover

% Percorre no a no os elementos que partem desse no
for n = 1:length(freq)
    % Actualiza contador
    elemcount = elemcount + freq(n);
    % Verifica para cada no os angulos distintos que existem
    equalang = unique(props((elemcount-freq(n)+1):(elemcount),1:2),'rows');
    % Compara cada um dos angulos distintos com os elementos
    % respectivos ao no
    for i = 1:size(equalang,1)
        % Indices de elementos a comparar por no por angulo
        idx = 0;
        for j = (elemcount-freq(n)+1):(elemcount)
            % Regista numero do elemento se tiver angulo igual ao que
            % se esta a comparar
            if props(j,1:2) == equalang(i,:)
                if idx == 0
                    idx = j;
                else
                    idx(length(idx)+1) = j;
                end
            end
        end
        for ii = 1:length(idx)
            if props(idx(ii),3) > min(props(idx,3))
                if delete_elem == 0
                    delete_elem = idx(ii);
                else
                    delete_elem(length(delete_elem)+1) = idx(ii);
                end
            end
        end
    end
end

if delete_elem ~= 0
    e_nodes(delete_elem,:) = [];
end
end

```

A título de exemplo apresentam-se duas ground structures formadas a partir dos nós das estruturas de 26 e 36 barras, nas Figuras D.1 e D.2.

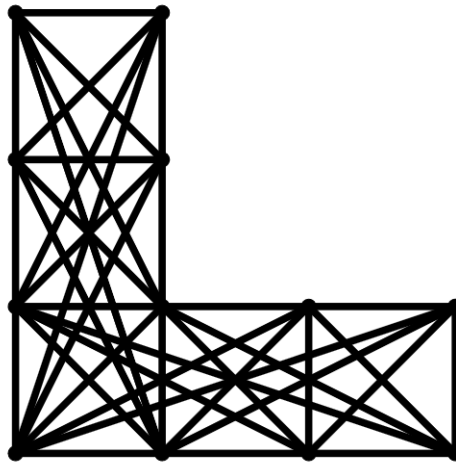


Figura D.1: *Ground structure* criada a partir dos nós da estrutura de 26 barras através do problema GroundStructure.m.

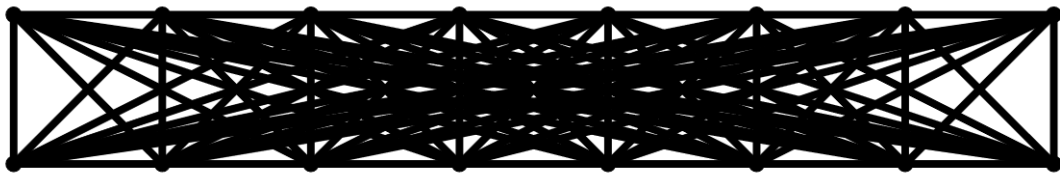


Figura D.2: *Ground structure* criada a partir dos nós da estrutura de 36 barras através do problema GroundStructure.m.